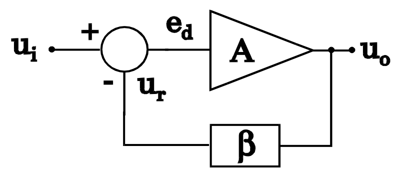
Stabilnost kola sa povratnom spregom

Model kola sa povratnom spregom



Kod idealizovanog modela se pretpostavlja da kolo povratne sprege vrši unilateralan prenos signala sa izlaza pojačavača na njegov ulaz, ukoliko je ulazna impedansa osnovnog pojačavača beskonačno velika a izlazna jednaka nuli.

Kod realnih pojačavača ovaj uslov nije u potpunosti ispunjen, jer se preko kola povratne sprege, koje je najčešće sačinjeno od pasivnih komponenti, vrši bilateralan prenos ne samo sa izlaza pojačavača do njegovog ulaza već i suprotnom smeru.

Model kola sa povratnom spregom

Za idealizovani model kola sa povratnom spregom važi sledeća jednačina:

$$U_o = A(s)\cdot E_d$$

$$E_d = U_i - U_r = U_i - \beta(s)\cdot U_o$$

pojačanje pojačavača sa povratnom spregom:

$$A_r(s) = \frac{U_o}{U_i} = \frac{A(s)}{1 + A(s)\cdot\beta(s)} = H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

T(s)=A(s)β(s) predstavlja kružno pojačanje pojačavača sa povratnom spregom. Prenosna funkcija kola ima polove na frekvencijama na kojima funkcija reakcije ima nule, tj. kada je:

$$1 + A(s)\cdot\beta(s) = 1 + T(s) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T(s) = -1$$

Stabilnost pojačavača

Da bi pojačavač bio stabilan polovi prenosne funkcije (nule funkcije reakcije) moraju ležati u levoj poluravni kompleksne s-ravni, tj. moraju imati negativni realni deo.

Za analizu stabilnosti pojačavača sa povratnom spregom koriste se različiti kriterijumi, od kojih su najpoznatiji:

- Hurwitzov kriterijum
- Geometrijsko mesto korenova
- Nyquistov kriterijum
- Bodeov kriterijum.

Ovde će biti reči samo o Bodeovom kriterijumu.

Bodeov kriterijum

Prenosna funkcija linearnih pojačavača H(s), koja predstavlja odnos izlaznog i ulaznog napona u *s*-domenu, može se predstaviti u faktorizovanom obliku na sledeći način:

$$H(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=K\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-p_i)}$$

gde nule z_i i polovi p_i mogu biti realni ili kompleksni. Ukoliko su kompleksne nule, i polovi se javljaju u konjugovano kompleksnim parovima. Nule mogu biti raspoređene u celoj kompleksnoj s-ravni, dok se polovi mogu naći samo u levoj poluravni.

Bodeov kriterijum

Na osi realnih frekvencija (s=jω) prenosna funkcija se može predstaviti amplitudskom i faznom karakteristikom.

Amplitudska karakteristika
predstavlja zavisnost modula prenosne funkcije od frekvencije:

$$a(\omega)=20\log\left|H(j\omega)\right|=20\log|K|+\sum_{i=1}^{n}20\log\left|j\omega-z_i\right|-\sum_{i=1}^{m}20\log\left|j\omega-p_i\right|$$

Fazna karakteristika
je zavisnost argumenta prenosne funkcije od frekvencije:

$$\varphi(\omega)=\arg\{H(j\omega)\}=\sum_{i=1}^{n}arctg\frac{\mathrm{Im}\{j\omega-z_i\}}{\mathrm{Re}\{j\omega-z_i\}}-\sum_{i=1}^{m}arctg\frac{\mathrm{Im}\{j\omega-p_i\}}{\mathrm{Re}\{j\omega-p_i\}}$$

Bodeov kriterijum

Pošto i amplitudska, i fazna karakteristika predstavljaju zbir odgovarajućih doprinosa pojedinačnih faktora iz brojioca odnosno imenioca prenosne funkcije, to se njihovo crtanje svodi na crtanje svakog od njih, a ukupna karakteristika se dobija njihovim sabiranjem.

Prenosna funkcija pojačavača H(s) data u faktorizovanom obliku može sadržati jedan ili više činilaca oblika:

a) konstanta (K)

b) nula u koordinatnom početku (*s*)

c) realni pol $1/(s+\sigma)$

d) realnu nulu $(s+\sigma)$

e) konjugovano kompleksne polove $1\Big/\left(s^2+\frac{\omega_p}{Q_p}\cdot s+\omega_p^2\right)$

f) konjugovano kompleksne nule $\left(s^2+\frac{\omega_z}{Q_z}\cdot s+\omega_z^2\right)$

Analiza stabilnosti

Za analizu stabilnosti pojačavača treba razmatrati funkciju reakcije čije su nule uzrok oscilovanja, jer kada je:

$$1+A(s)\cdot\beta(s)=0$$

pojačanje A_r teži beskonačnosti, odnosno pojačavač osciluje. Prema tome pojačavač je na granici stabilnosti kada je kružno pojačanje:

$$T(s)=A(s)\cdot\beta(s)=-1$$

tj. kada je moduo kružnog pojačanja jednak jedinici:

$$|T(j\omega)|=1$$

a argument kružnog pojačanja -180^0:

$$\varphi(\omega)=-180^o(-\pi rad)$$

U slučaju jediničnog pojačavača (β=1) amplitudska i fazna karakteristika samog pojačavača istovremeno predstavljaju i moduo i argument kružnog pojačanja i to je najnepovoljniji režim rada pojačavača u pogledu stabilnosti.

Analiza stabilnosti

Kod analize stabilnosti pojačavača važne su sledeće frekvencije:

f_0 - frekvencija na kojoj moduo kružnog pojačanja prvi put postane jednak jedinici (0dB) - kritična frekvencija,

f_π - frekvencija na kojoj argument kružnog pojačanja prvi put dostiže -180° (-π radijana).

Bodeov kriterijum stabilnosti definisan je na sledeći način:

Pojačavač je stabilan ako je ispunjen uslov:

$$f_0 < f_\pi$$

tj. ako moduo kružnog pojačanja opadne na vrednost 1 (0dB) pre nego što faza dostigne -180°.

Analiza stabilnosti

Margina faze je razlika između faze kružnog pojačanja na frekvenciji $f = f_0$ i ($f = -180^o$)

$$\phi_m = \varphi(f_0) - \left(-180^o\right) = \arg\{A(jf_0)\beta(jf_0)\} + 180^o$$

Moduo kružnog pojačanja treba da je negativan na frekvenciji $f = f_\pi$ da bi pojačavač bio stabilan, pa se **margina pojačanja** definiše kao:

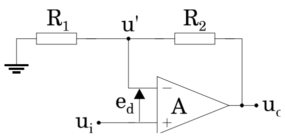
$$G_m = 20\log\left|A(jf_\pi)\cdot\beta(jf_\pi)\right|$$

Pojačavač je stabilan ukoliko je margina faze pozitivna, a margina pojačanja negativna veličina.

Da bi se dobile dobre karakteristike u prelaznom režimu margina faze treba da je veća od 45°, što znači da faza na frekvenciji f_0 ne sme biti ispod -135°, a to opet znači da nagib amplitudske karakteristike u okolini ove frekvencije treba da je ≤6dB/oct (20dB/dek). U slučaju da su polovi dovoljno odvojeni tada marginu faze imamo kada na kritičnoj frekvenciji f_0 amplitudska karakteristika menja nagib od 20dB/dek na 40dB/dek.

Bodeovi dijagrami

Prikaz i objašnjenje crtanja Bodeovih dijagrama najbolje je izvesti na primeru neinvertujućeg pojačavača:



Kolo povratne sprege sadrži samo otpornike pa je koeficijent povratne sprege nezavisan od frekvencije i dat je izrazom:

$$\beta(s) = \beta_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Pojačanje operacionog pojačavača dato je izrazom:

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + s/\omega_1}$$

Bodeovi dijagrami

Prenosna funkcija neinvertujućeg pojačavača je:

$$A_r(s) = \frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{1+\frac{1+s/\omega_1}{A_0\beta_0}} = \frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{\frac{1+A_0\beta_0+s/\omega_1}{A_0\beta_0}} \cong \frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{1+\frac{s/\omega_1}{A_0\beta_0}}$$

jer je $A_0\beta_0 >> 1$

$$A_r(s) = \frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{1+\frac{s}{\omega_0}}$$

gde je

$$\omega_0 = \beta_0 \cdot A_0 \cdot \omega_1 = \beta_0 \cdot \omega_T$$

Prenosna funkcija neinvertujućeg pojačavača je takođe sa jednim polom ω_0.

Bodeovi dijagrami

Funkcija kružnog pojačanja : $A(s)\cdot\beta(s)=\dfrac{A_0\cdot\beta_0}{1+s/\omega_1}$

ima jedan pol koji je jednak polu prenosne funkcije operacionog pojačavača. Ukoliko odredimo frekvenciju na kojoj moduo kružnog pojačanja postaje jednak jedinici dobićemo da je to frekvencija ω_0 na kojoj prenosna funkcija neinvertujućeg pojačavača ima pol. Drugim rečima, imajući u vidu da je:

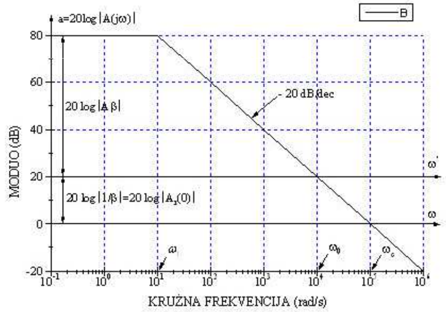
$$20\log\left|A(j\omega)\cdot\beta(j\omega)\right| = 20\log\left|A(j\omega)\cdot\right| - 20\log\left|1/\cdot\beta(j\omega)\right|$$

možemo najpre nacrtati amplitudsku karakteristiku operacionog pojačavača, a zatim frekvencijsku osu podići za iznos pojačanja neinvertujućeg pojačavača pri niskim frekvencijama:

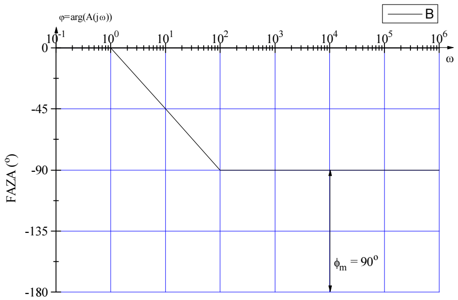
$$A_r(0) = 20\log\left|\frac{1}{\beta_0}\right|$$

Bodeovi dijagrami

Iznad nove frekvencijske ose nalazi se moduo funkcije kružnog pojačanja, dok se ispod ove ose nalazi prenosna funkcija neinvertujućeg pojačavača. Za konkretne vrednosti $A_0=10^4$, $\beta_0=0.1$ i $\omega_1=10$rad/s prikazani su Bodeovi dijagrami:



Bodeovi dijagrami



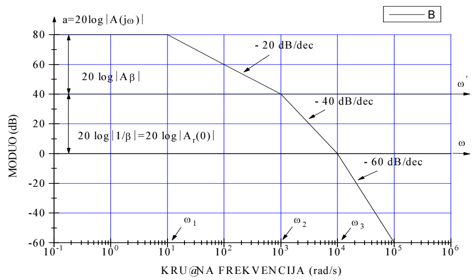
Sa dijagrama se vidi da je pojačavač sa jednopolnom funkcijom kružnog pojačanja uvek stabilan jer fazna karakteristika ima najnižu vrednost od -90°, i marginu faze najmanje 90°.

Bodeovi dijagrami

Razmotrimo slučaj istog pojačavača kod koga upotrebljeni operacioni pojačavač ima tropolnu prenosnu funkciju datu izrazom:

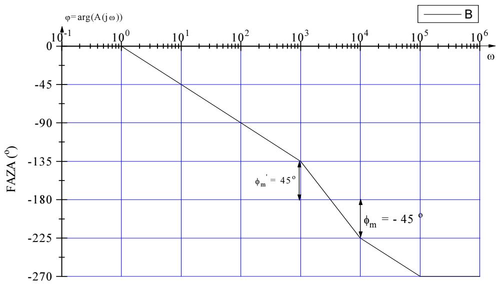
$$A(s)=\frac{A_o}{\left(1+{s}/{\omega_1}\right)\cdot\left(1+{s}/{\omega_2}\right)\cdot\left(1+{s}/{\omega_3}\right)}$$

$A_0=10^4$, $\omega_1=10$rad/s, $\omega_2=10^3$rad/s, $\omega_3=10^4$rad/s



Kada bi pojačavač radio sa maksimalnim iznosom koeficijenta povratne sprege $\beta=1$, neinvertujući pojačavač bi bio nestabilan. Zbog toga se mora odabrati koeficijent $\beta<1$. Svakako, koeficijent povratne sprege se bira zavisno od željene margine faze.

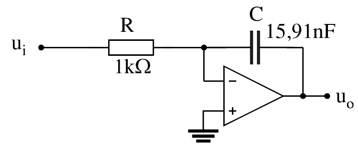
Bodeovi dijagrami



Ukoliko se želi margina faze od 45°, frekvencijska osa se mora podići tako da amplitudska karakteristika seče pomerenu frekventnu osu na frekvenciji na kojoj faza iznosi -135°.

Bodeovi dijagrami

Koeficijent povratne sprege može biti i frekvencijski zavisan, odnosno kolo povratne sprege pored otpornika može sadržati i kondenzatore.
Jedno od najjednostavnijih takvih kola je kolo integratora:



Koeficijent povratne sprege je u ovom slučaju:

$$\beta(s)=\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{sRC}{1+sRC}=\frac{\frac{s}{2\pi\cdot 10^4}}{1+\frac{s}{2\pi\cdot 10^4}}$$

Bodeovi dijagrami

Ukoliko je pojačanje operacionog pojačavača dvopolna funkcija data izrazom:

$$A(s)=\frac{10^5}{\left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 10}\right)\cdot\left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 10^5}\right)}$$

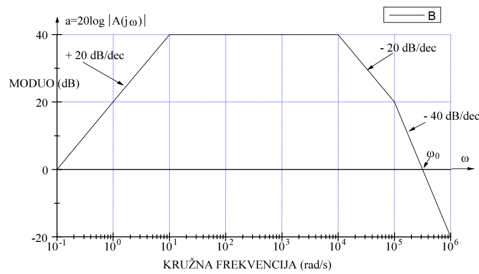
tada je funkcija kružnog pojačanja:

$$T(s)=\frac{10^5\frac{s}{2\pi\cdot 10^4}}{\left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 10}\right)\cdot\left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 10^5}\right)\cdot\left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 10^4}\right)}$$

Ovo je tropolna prenosna funkcija sa nulom u koordinatnom početku

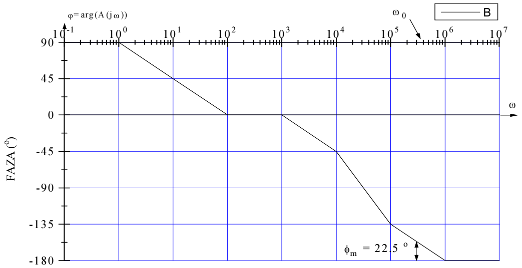
Bodeovi dijagrami

Nula obezbeđuje pozitivan nagib od 20dB/dek kroz koordinatni početak koji se u logaritamskoj razmeri na frekventnoj osi ne može nacrtati. Zbog toga je pri crtanju amplitudske karakteristike najpogodnije izračunati moduo funkcije kružnog pojačanja na nekoj frekvenciji koja je bar 10 puta niža od frekvencije najnižeg pola. Možemo izabrati frekvenciju f=1Hz (ω=2π) i moduo kružnog pojačanja je u tom slučaju 10.



$$T(s)=\frac{10^5\frac{s}{2\pi\cdot 10^4}}{\left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 10}\right)\cdot\left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 10^5}\right)\cdot\left(1+\frac{s}{2\pi\cdot 10^4}\right)}$$

Bodeovi dijagrami



fazna karakteristika

$$T(s) = \frac{10^5 \dfrac{s}{2\pi \cdot 10^4}}{\left(1 + \dfrac{s}{2\pi \cdot 10}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{s}{2\pi \cdot 10^5}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{s}{2\pi \cdot 10^4}\right)}$$

Uticaj margine faze na premašenje u amplitudskoj karakteristici

Pretpostavimo da operacioni pojačavač ima jednopolnu prenosnu funkciju:

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + \dfrac{s}{\omega_1}} \quad \text{i} \quad \beta(s) = \beta_0$$

$$T(s) = A(s) \cdot \beta(s) = \frac{A_0 \cdot \beta_0}{1 + \dfrac{s}{\omega_1}}$$

Pojačanje pojačavača sa povratnom spregom je u tom slučaju:

$$A_r(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s) \cdot \beta(s)} = \frac{A_0}{1 + A_0 \cdot \beta_0 + \dfrac{s}{\omega_1}}$$

Uticaj margine faze na premašenje u amplitudskoj karakteristici

Ukoliko želimo marginu faze $\phi_m = 180^o + \arg\{T(j\omega_0)\}$, gde je ω_0 frekvencija na kojoj moduo kružnog pojačanja $|T(j\omega_0)| = 1$, tada je:

$$\arg\{T(j\omega_0)\} = \phi_m - 180^o$$

pa je funkcija kružnog pojačanja:

$$T(j\omega_0) = |T(j\omega_0)| \cdot \exp\left(j \cdot \arg\{T(j\omega_0)\}\right) = 1 \cdot \exp\left[j(\phi_m - 180^o)\right]$$

S druge strane je: $|T(j\omega_0)| = |A(j\omega_0) \cdot \beta_0| = 1 \Longrightarrow |A(j\omega_0)| = \dfrac{1}{\beta_0}$

Uticaj margine faze na premašenje u amplitudskoj karakteristici

Na osi realnih frekvencija pojačanje pojačavača sa povratnom spregom ima oblik sličan obliku:

$$A_r(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + T(j\omega)}$$

pa zamenom navedenih izraza dobijamo pojačanje pojačavača sa povratnom spregom na frekvenciji ω_0:

$$A_r(j\omega_0) = \frac{A(j\omega_0)}{1 + 1 \cdot \exp\left(j \cdot (\phi_m - 180^o)\right)} = \frac{A(j\omega)}{1 + \cos(\phi_m - 180^o) + j \cdot \sin(\phi_m - 180^o)}$$

Moduo pojačanja pojačavača sa povratnom spregom na frekvenciji ω_0 je:

$$|A_r(j\omega_0)| = \frac{|A(j\omega_0)|}{\sqrt{\left[1 + \cos(\phi_m - 180^o)\right]^2 + \left[\sin(\phi_m - 180^o)\right]^2}}$$

Uticaj margine faze na premašenje u amplitudskoj karakteristici

Kako frekvencija ω_0 predstavlja graničnu frekvenciju, tj. propusni opseg definisan sa 3dB slabljenja u odnosu na pojačanje pojačavača sa povratnom spregom pri niskim frekvencijama, to je pri frekvenciji ω_0 premašenje dato izrazom:

$$p = \frac{|A_r(j\omega_0)|}{|A_r(0)|} = \frac{1}{\sqrt{\left[1+\cos(\phi_m - 180^o)\right]^2 + \left[\sin(\phi_m - 180^o)\right]^2}}$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\cos(\phi_m)\right]^2 + \left[\sin(\phi_m)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\phi_m)}}$$

Ako se zahteva margina faze od 45^o premašenje na osnovu ovog izraza iznosi 1.31, što znači da je $|A_r(j\omega_0)|$ je 1.31 puta veće od $|A_r(0)|$.