



# Oscilatori

**Marko Dimitrijević**

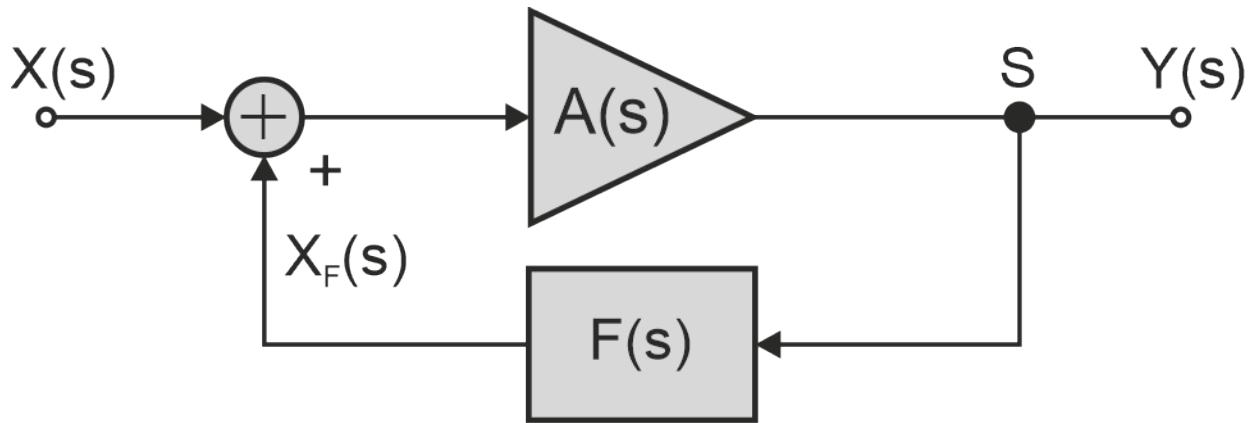
# Uvod

- Oscilatori su kola koja (bez pobude) generišu periodičan signal (struju, napon) konstantne frekvencije.
- Generisan signal može biti prostoperiodičan ili složenoperiodičan.
- Oscilatori prostoperiodičnih signala se nazivaju *linearni oscilatori*. Oscilatori koji generišu složenoperiodične signale se nazivaju *relaksacioni oscilatori*.
- Osiclatori su kola sa *pozitivnom povratnom spregom*.
- Prema rezonantnom kolu, dele se na RC oscilatore, LC oscilatore i oscilatore sa kristalom kvarca.

# Uvod

- Pojačanje  $A(s)$  i prenosna funkcija kola povratne sprege  $F(s)$  su u opštem slučaju funkcije frekvencije  $s$ .

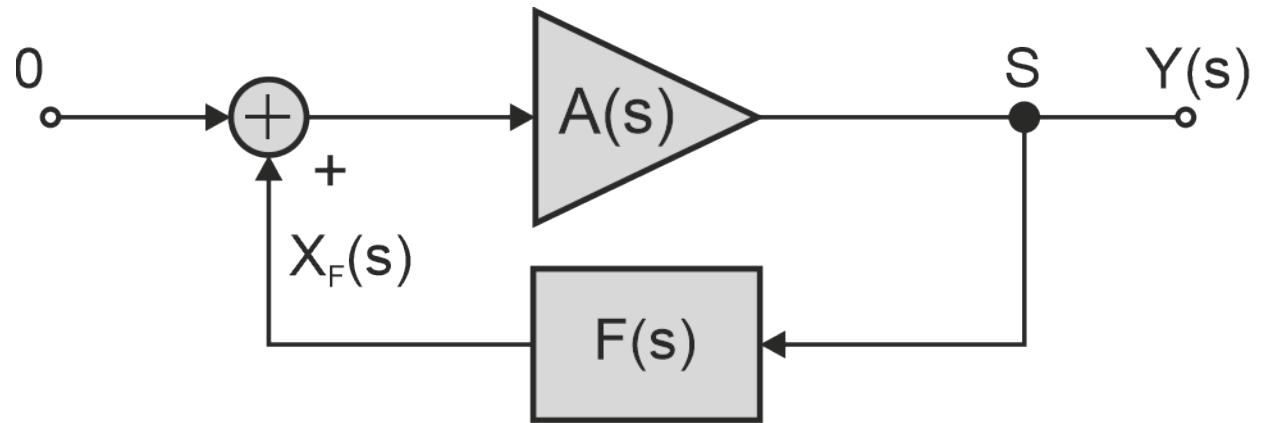
$$A_F(s) = \frac{A(s)}{1 - A(s)F(s)}$$



# Uslov oscilovanja

- Ukoliko je kružno pojačanje  $A(s)F(s)$  jednako jedinici, ukupno pojačanje je beskonačno.
- Kolo će bez pobude generisati signal  $Y(s)$ .
- *Barkhauzenov uslov oscilovanja:*

$$A(s)F(s) = 1$$

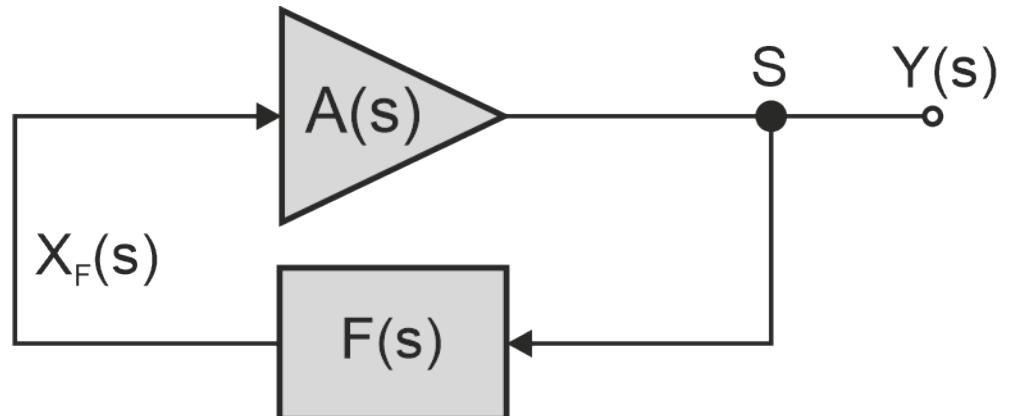


# Barkhauzenov kriterijum

- Kružno pojačanje  
 $A(s)F(s)$  je kompleksna funkcija, tako da se Barkhauzenov uslov može predstaviti realnim jednačinama:

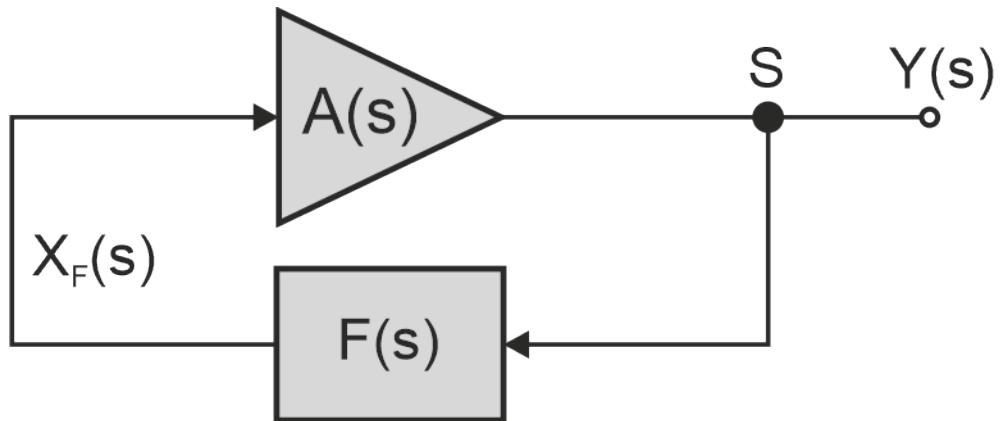
$$\operatorname{Re}(A(s)F(s)) = 1, \quad \operatorname{Im}(A(s)F(s)) = 0$$

$$|A(s)F(s)| = 1, \quad \arg(A(s)F(s)) = 2k\pi$$



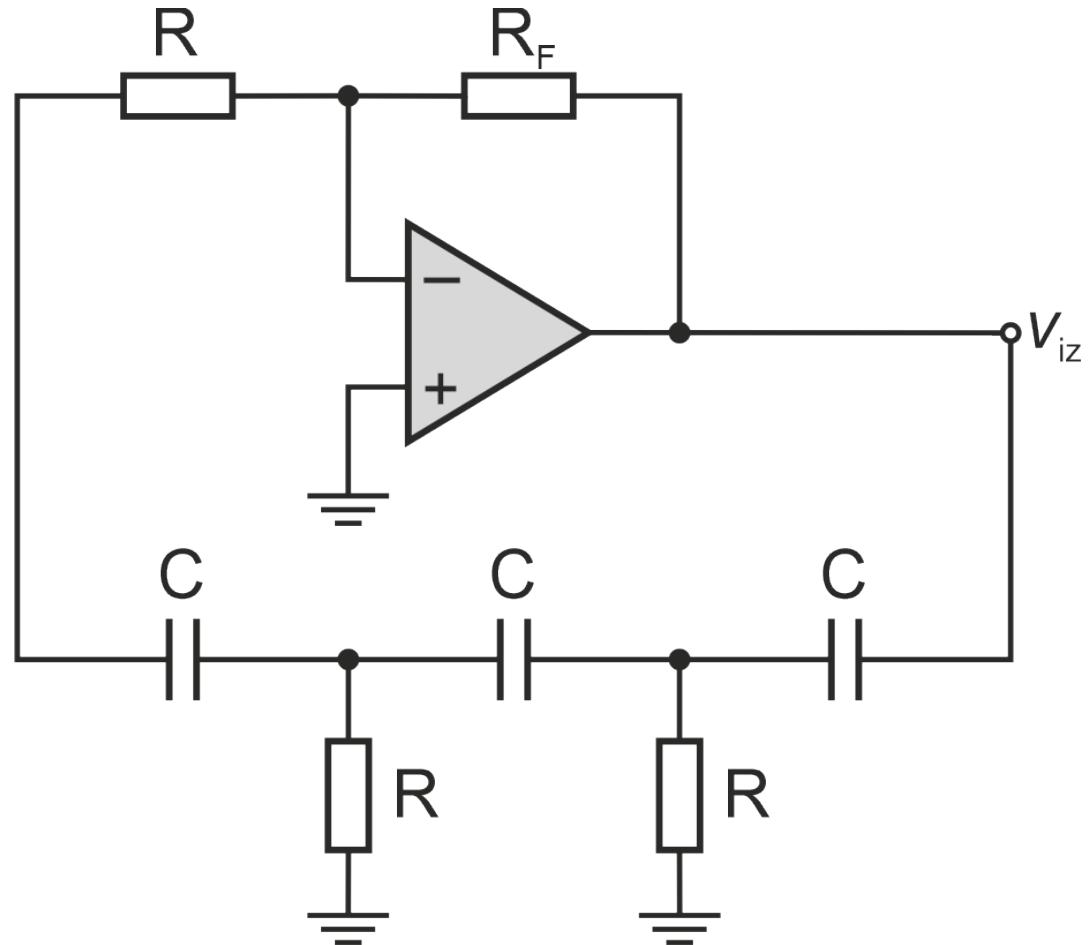
# Analiza oscilatora

- Direktna primena Barkhauzenovog kriterijuma (određivanje kružnog pojačanja, uslova i frekvencije oscilovanja).
- Analiza stabilnosti kola, određivanjem matrice sistema jednačina kola.



# Oscilator sa faznim pomerajem

- Oscilator sa faznim pomerajem se sastoji od invertujućeg pojačavača i kola povratne sprege.



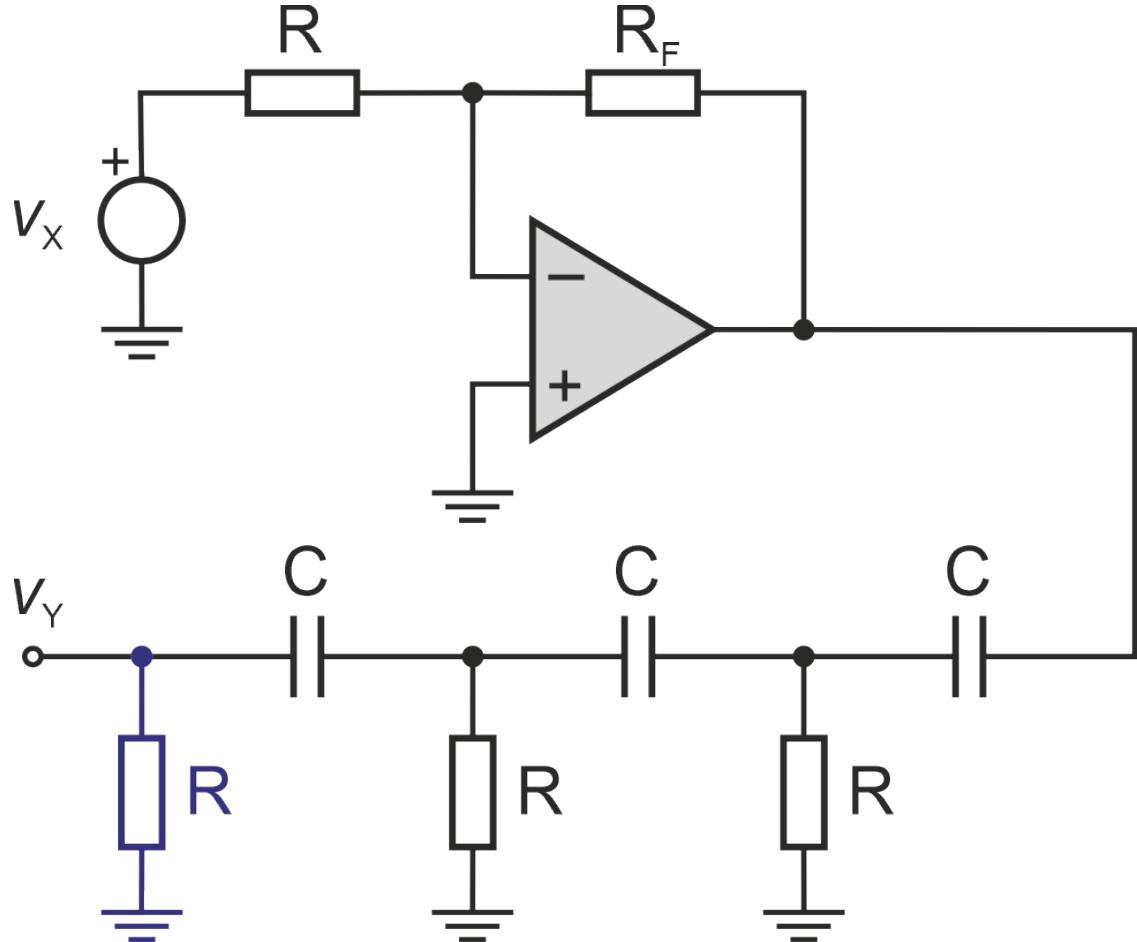
# Oscilator sa faznim pomerajem

$$A(s)F(s) = \frac{v_Y(s)}{v_X(s)}$$

$$A(s) = -\frac{R_F}{R}$$

$$F(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} \frac{Z_1}{Z_1 + \frac{1}{sC}} \frac{Z_2}{Z_2 + \frac{1}{sC}}$$

$$Z_1 = R \parallel \left( R + \frac{1}{sC} \right), \quad Z_2 = R \parallel \left( \frac{1}{sC} + Z_1 \right)$$



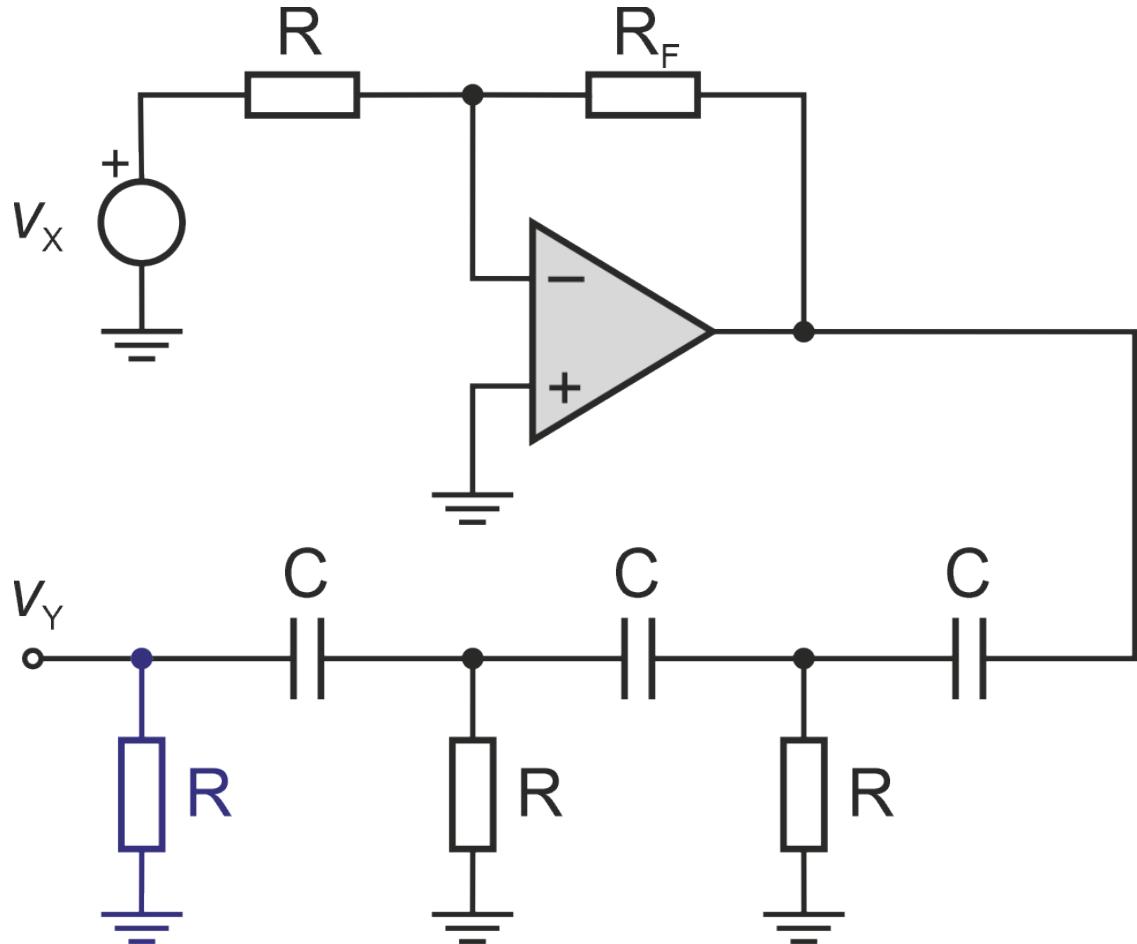
# Oscilator sa faznim pomerajem

- Barkhauzenov uslov:

$$A(s)F(s) = 1$$

$$A = -\frac{R_F}{R}$$

$$F(s) = \frac{s^3 R^3 C^3}{1 + 5sRC + 6s^2 R^2 C^2 + s^3 R^3 C^3}$$



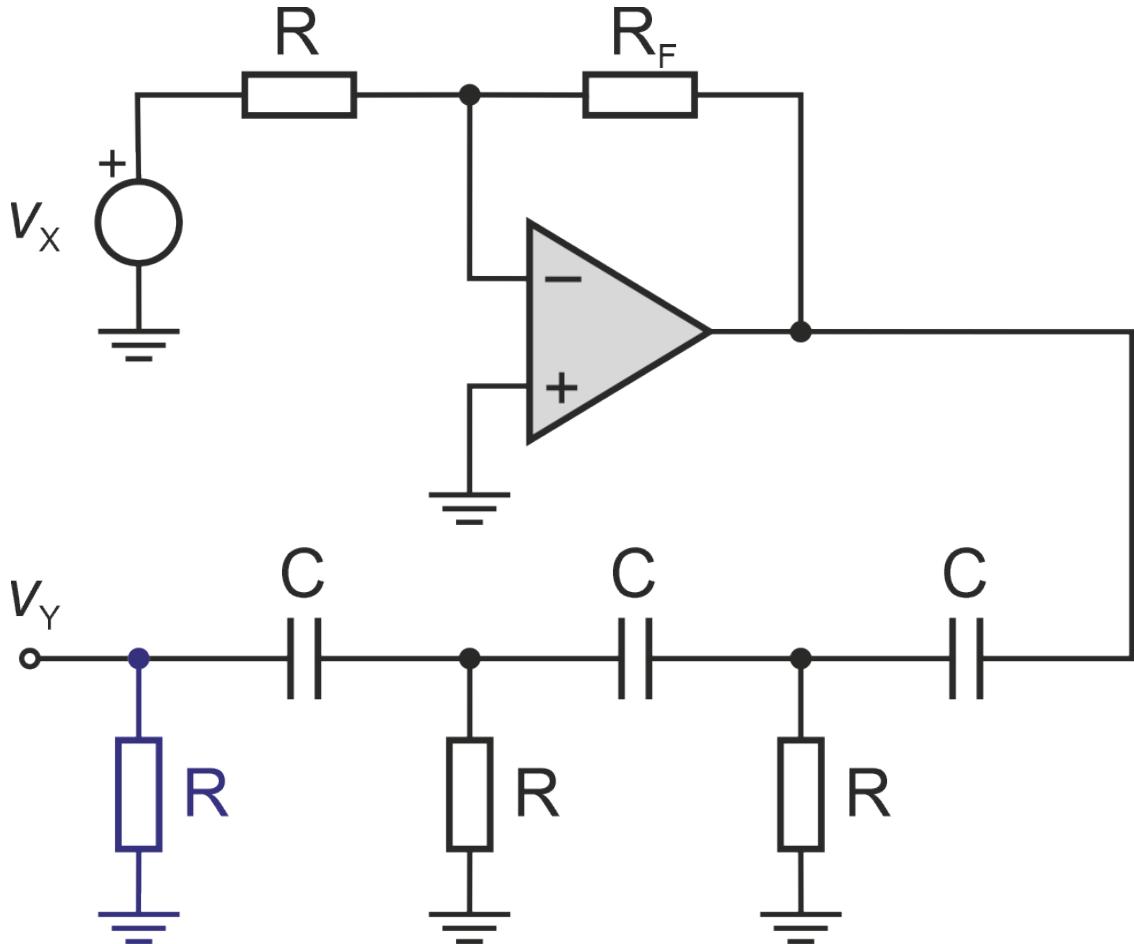
# Oscilator sa faznim pomerajem

$$1 + 5sRC + 6s^2R^2C^2 + s^3R^3C^3 = As^3R^3C^3$$

$$s = j\omega, \quad \tau = RC$$

$$\text{Re: } 1 - 6\omega^2\tau^2 = 0$$

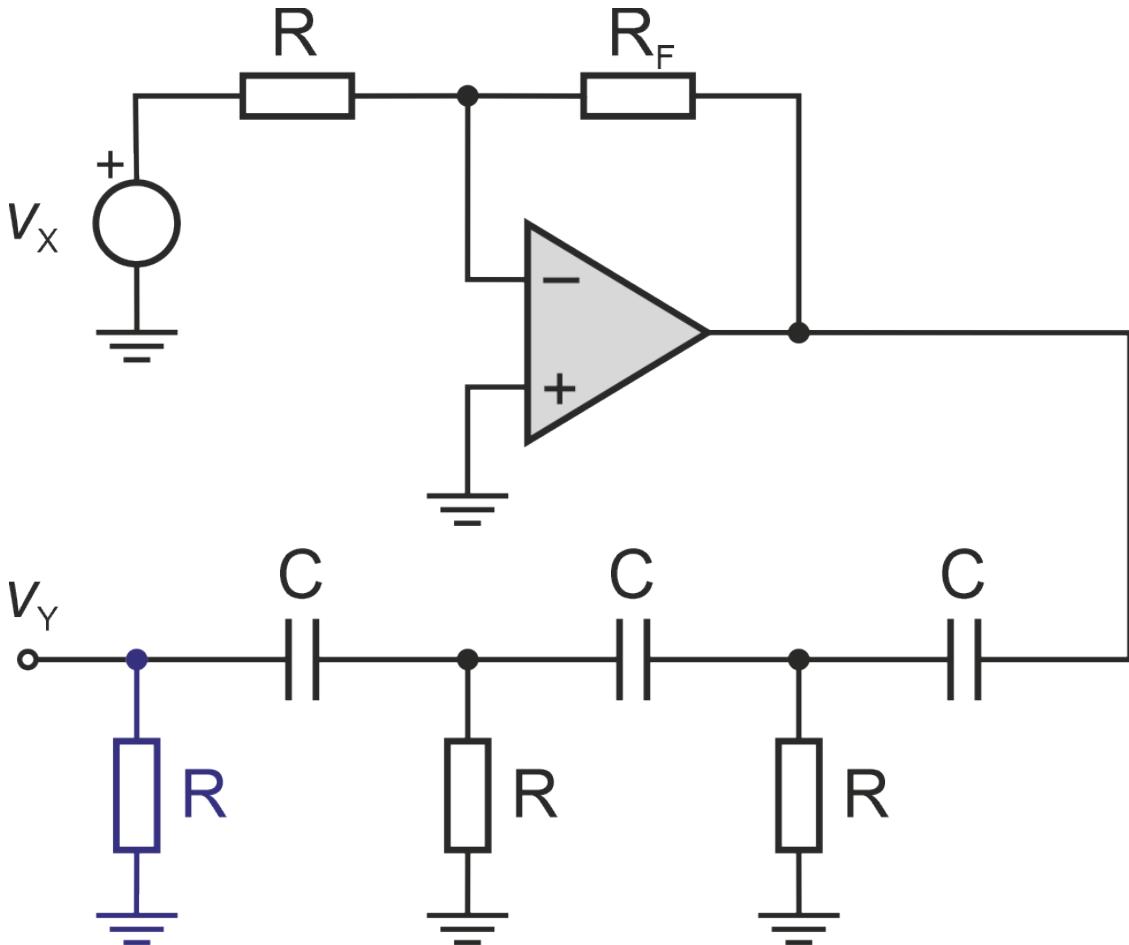
$$\text{Im: } 5\omega\tau - \omega^3\tau^3 = -A\omega^3\tau^3$$



# Oscilator sa faznim pomerajem

$$\text{Re: } \omega = \frac{1}{\sqrt{6}RC}$$

$$\text{Im: } A = -29, \quad R_F = 29R$$

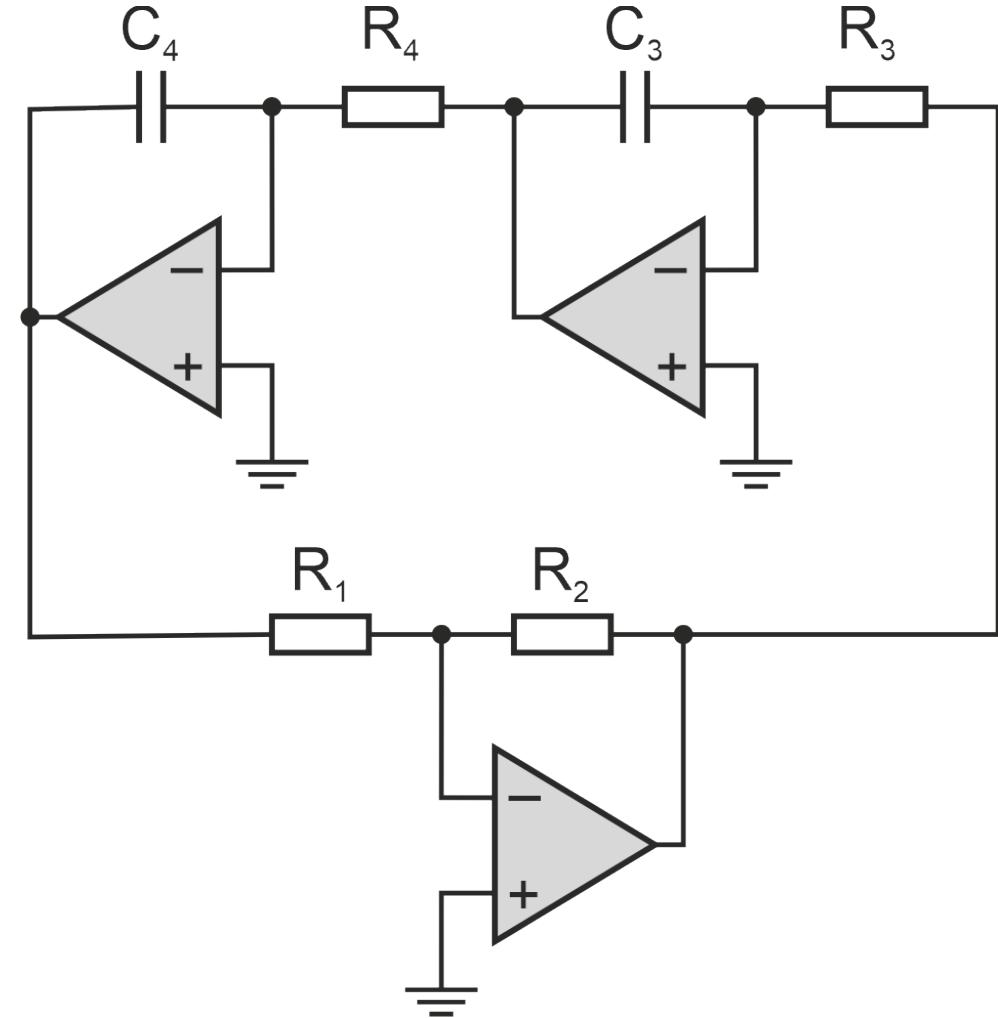


# Oscilator sa dvostrukom integracijom

- Kolo povratne sprege je realizovano od dva kaskadno vezana integratora.

$$A = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$F(s) = \left( -\frac{1}{sR_3C_3} \right) \left( -\frac{1}{sR_4C_4} \right) = \frac{1}{s^2 R_3 R_4 C_3 C_4}$$



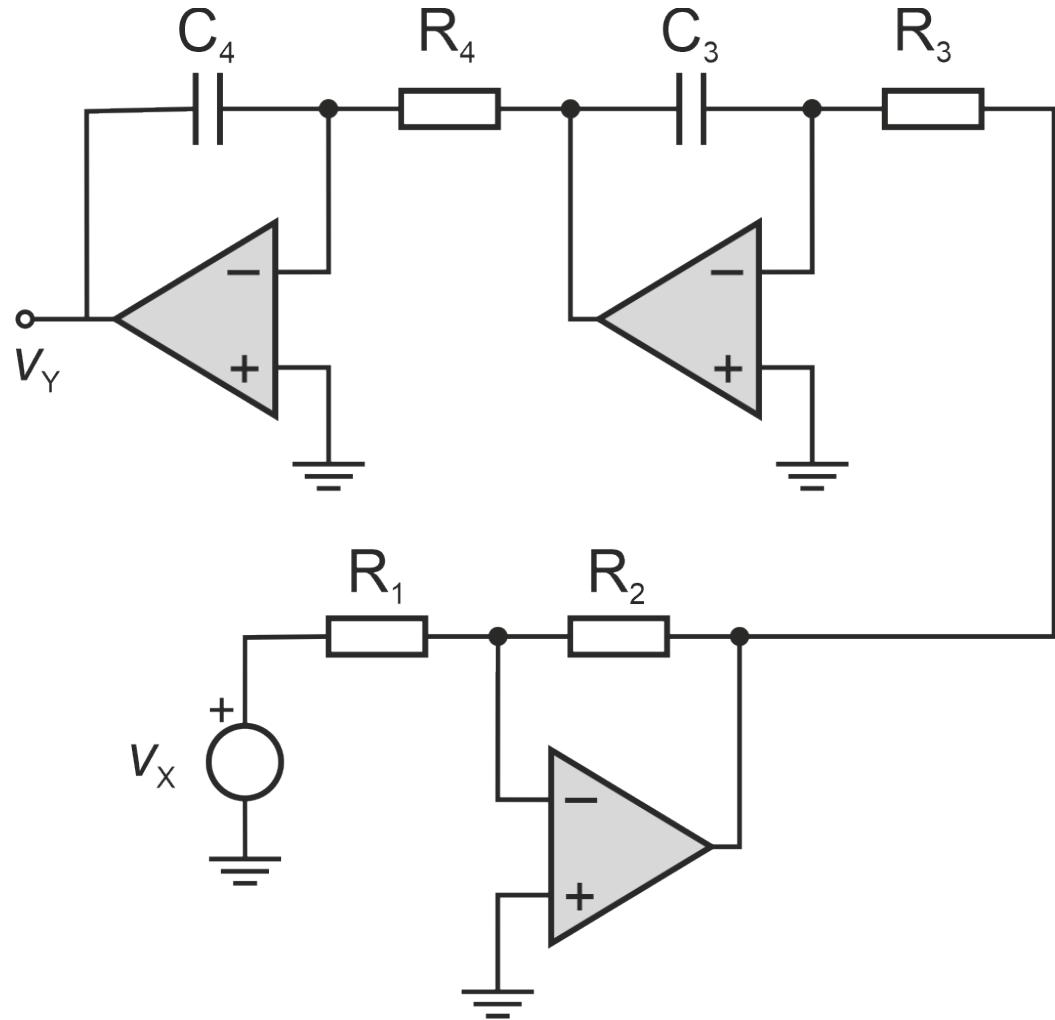
# Oscilator sa dvostrukom integracijom

- Barkhauzenov kriterijum

$$\frac{v_Y}{v_X} = A(s)F(s) = 1, \quad s = j\omega$$

$$A(s)F(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{s^2 R_3 R_4 C_3 C_4}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R_2}{R_1 R_3 R_4 C_3 C_4}}$$

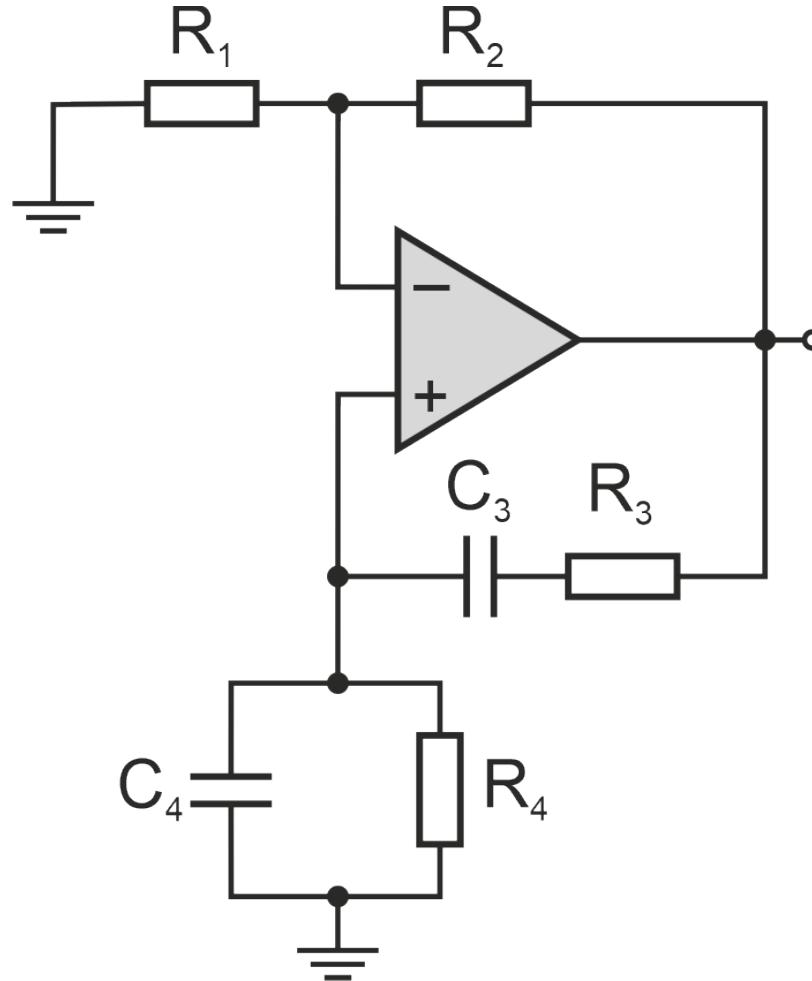


# Oscilator sa Vinovim mostom

- Oscilator je realizovan primenom neinvertujućeg pojačavača, kolo povratne sprege je razdelnik napona paralelne ( $Z_4$ ) i redne veze otpornika i kondenzatora ( $Z_3$ )

$$Z_3 = R_3 + \frac{1}{sC_3} = \frac{1 + sR_3C_3}{sC_3}$$

$$Z_4 = R_4 \parallel \frac{1}{sC_4} = \frac{R_4}{1 + sR_4C_4}$$



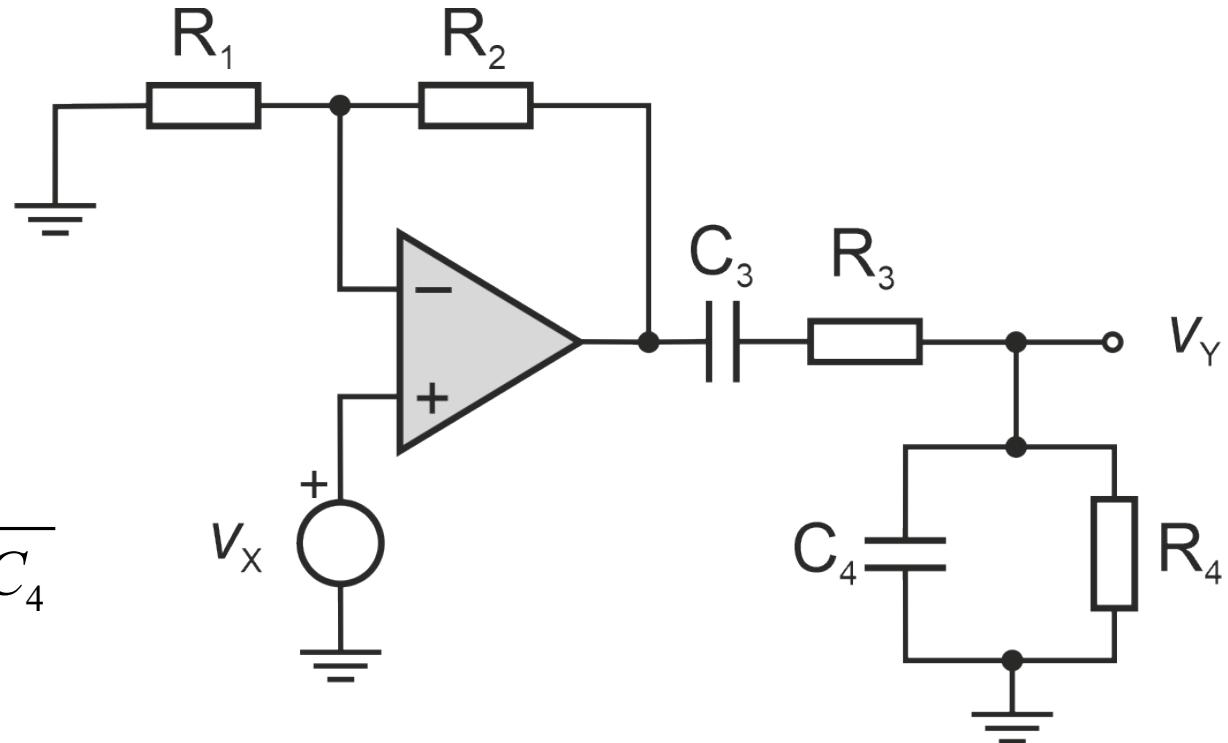
# Oscilátor sa Vinovim mostom

$$A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$F(s) = \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

$$F(s) = \frac{s R_4 C_3}{1 + s(R_3 C_3 + R_4 C_3 + R_4 C_4) + s^2 R_3 R_4 C_3 C_4}$$

$$A(s) F(s) = \frac{v_Y}{v_X} = 1$$



# Oscilátor sa Vinovím mostom

$$sAR_4C_3 = 1 + s(R_3C_3 + R_4C_3 + R_4C_4) + s^2R_3R_4C_3C_4$$

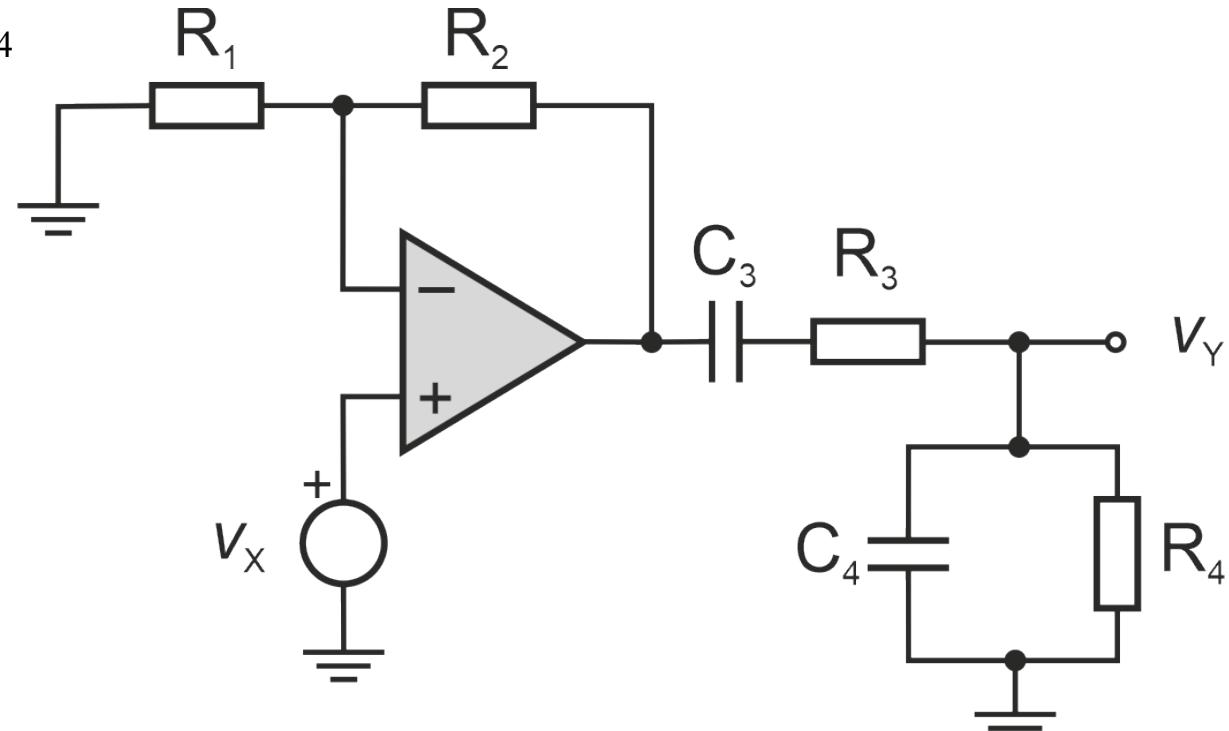
$$\text{Re: } 1 - \omega^2 R_3 R_4 C_3 C_4 = 0$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{R_3 R_4 C_3 C_4}}}$$

$$\text{Im: } AR_4C_3 = R_3C_3 + R_4C_3 + R_4C_4$$

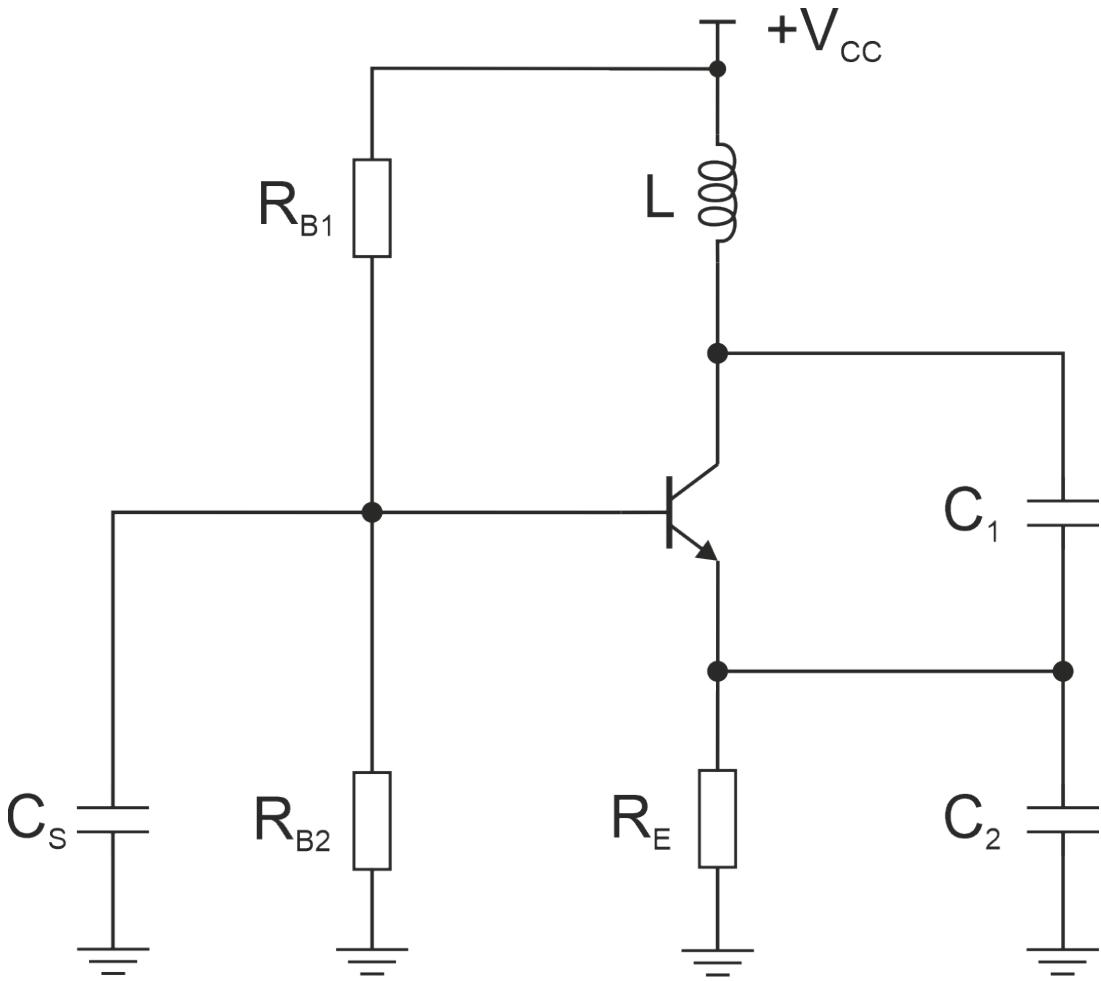
$$A = 1 + \frac{R_3C_3 + R_4C_4}{R_4C_3}$$

$$\boxed{\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3C_3 + R_4C_4}{R_4C_3} = \frac{R_3}{R_4} + \frac{C_4}{C_3}}$$



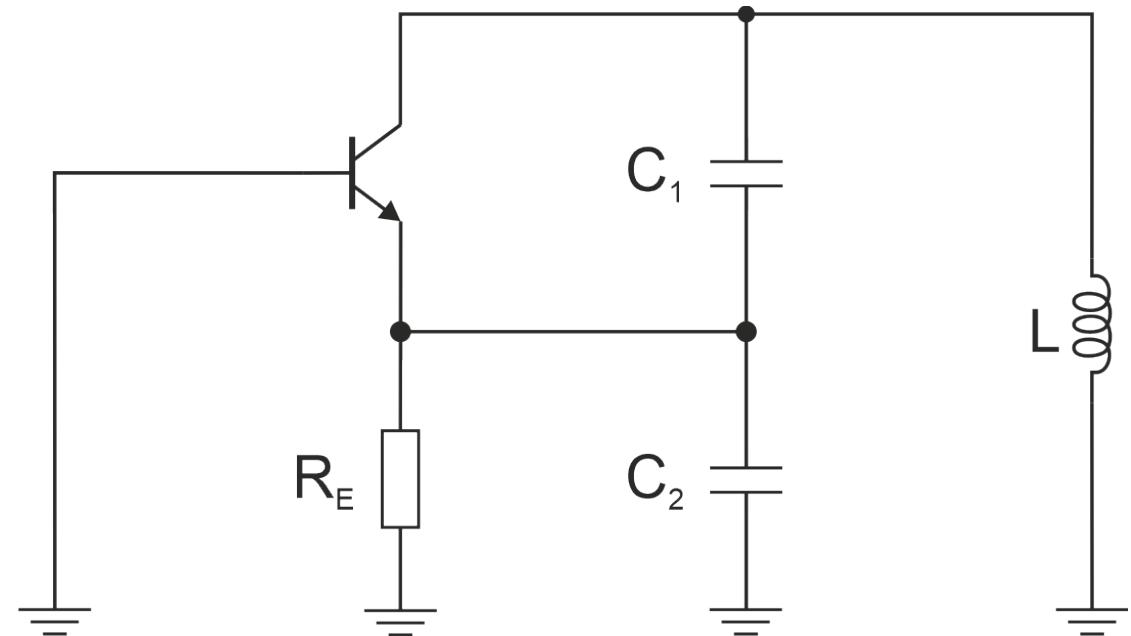
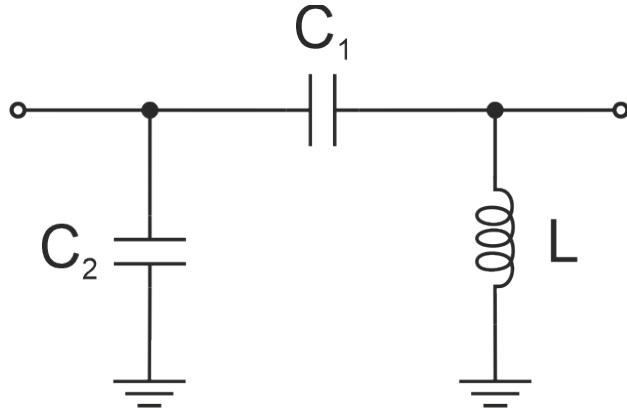
# Kolpicov (Colpitts) oscilator

- LC oscilator
- Pojačavač sa zajedničkom bazom ili emitorom (gejtom ili sorsom).
- Ulaz je na emitoru, izlaz na kolektoru.
- Kolo povratne sprege čine kalem L i kondenzatori  $C_1$  i  $C_2$
- $C_S = \infty$ ,  $r_o = \infty$ .
- Otpornici  $R_{B1}$  i  $R_{B2}$  služe za polarizaciju tranzistora.



# Kolpicov (Colpitts) oscilator

- Ekvivalentno kolo za naizmenični signal (desno).
- Kolo povratne sprege (dole).

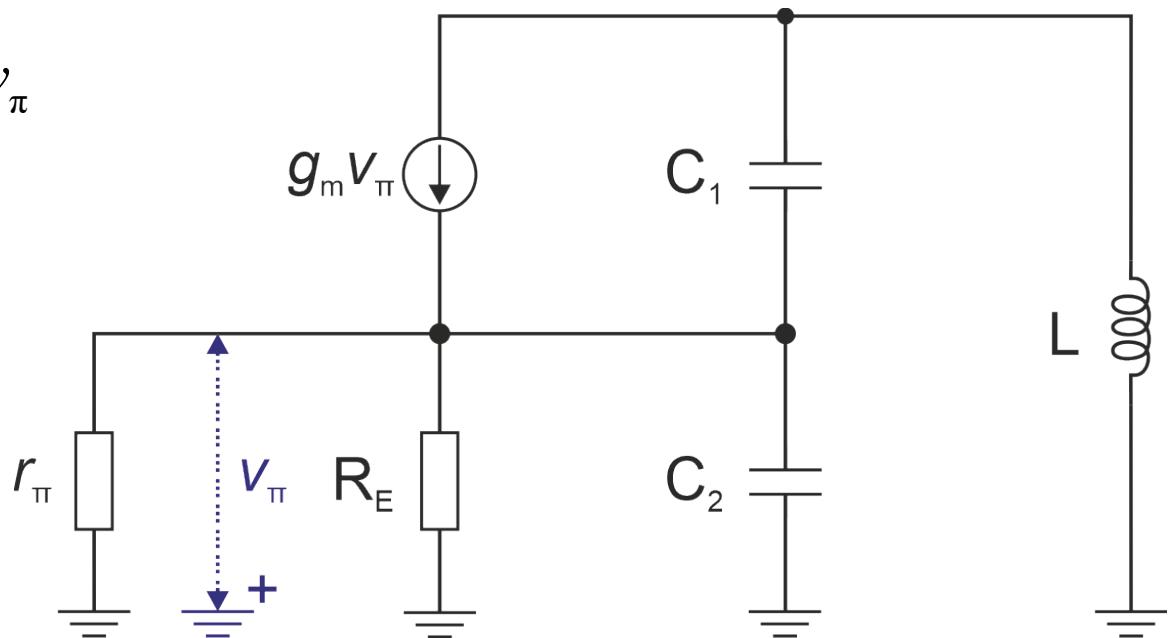


# Kolpicov (Colpitts) oscilator

- Model bipolarnog tranzistora za male signale,  $r_o = \infty$

$$E: -v_\pi \left( \frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{R_E} + sC_1 + sC_2 \right) - v_C sC_1 = g_m v_\pi$$

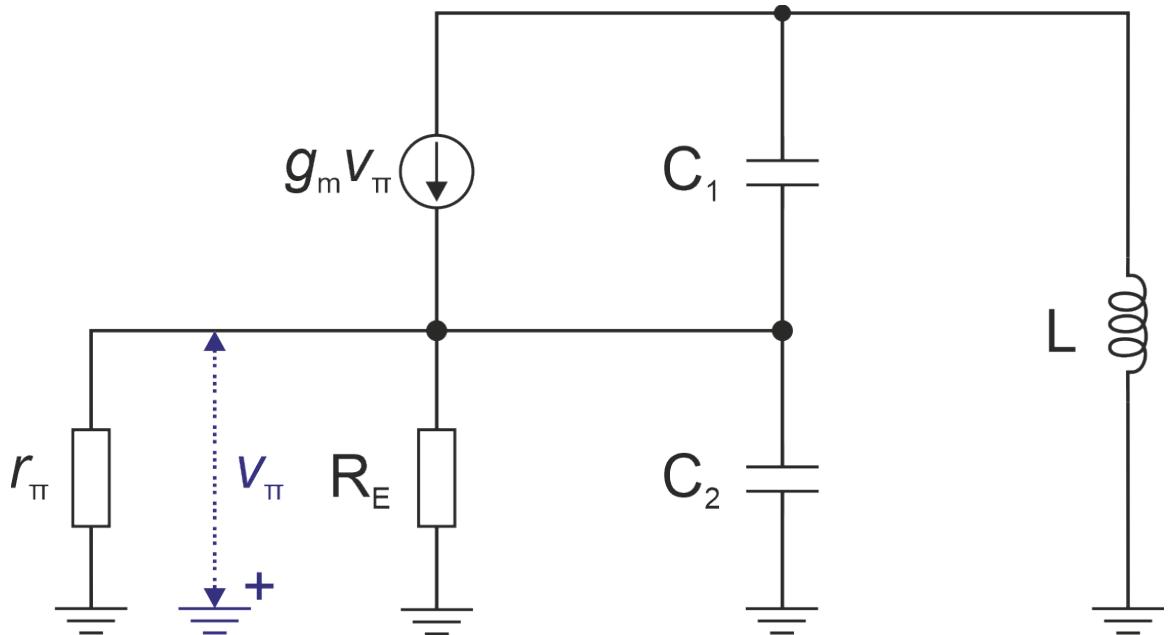
$$C: v_\pi sC_1 + v_C \left( sC_1 + \frac{1}{sL} \right) = -g_m v_\pi$$



# Kolpicov (Colpitts) oscilator

$$\text{E: } v_{\pi} \left( \frac{1}{r_{\pi}} + \frac{1}{R_E} + sC_1 + sC_2 + g_m \right) + v_C sC_1 = 0$$

$$\text{C: } v_{\pi} (g_m + sC_1) + v_C \left( sC_1 + \frac{1}{sL} \right) = 0$$



# Kolpicov (Colpitts) oscilator

- Slobodni vektor je nula vektor. Ukoliko je matrica sistema singularna, sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Kolo je nestabilno – osciluje.

$$\begin{bmatrix} 1/r_\pi + 1/R_E + sC_1 + sC_2 + g_m & sC_1 \\ g_m + sC_1 & sC_1 + 1/sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\pi \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1/r_\pi + 1/R_E + sC_1 + sC_2 + g_m & sC_1 \\ g_m + sC_1 & sC_1 + 1/sL \end{vmatrix} = 0$$

# Kolpicov (Colpitts) oscilator

$$\begin{vmatrix} 1/r_\pi + 1/R_E + sC_1 + sC_2 + g_m & sC_1 \\ g_m + sC_1 & sC_1 + 1/sL \end{vmatrix} = 0$$

$$s^2 C_1 C_2 + \left( sC_1 + \frac{1}{sL} \right) \left( g_m + \frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{R_E} \right) - sC_1 g_m + \frac{C_1 + C_2}{L} = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right)}$$

$$\text{Re: } s^2 C_1 C_2 + \frac{C_1 + C_2}{L} = 0$$

$$-\omega^2 C_1 C_2 + \frac{C_1 + C_2}{L} = 0$$

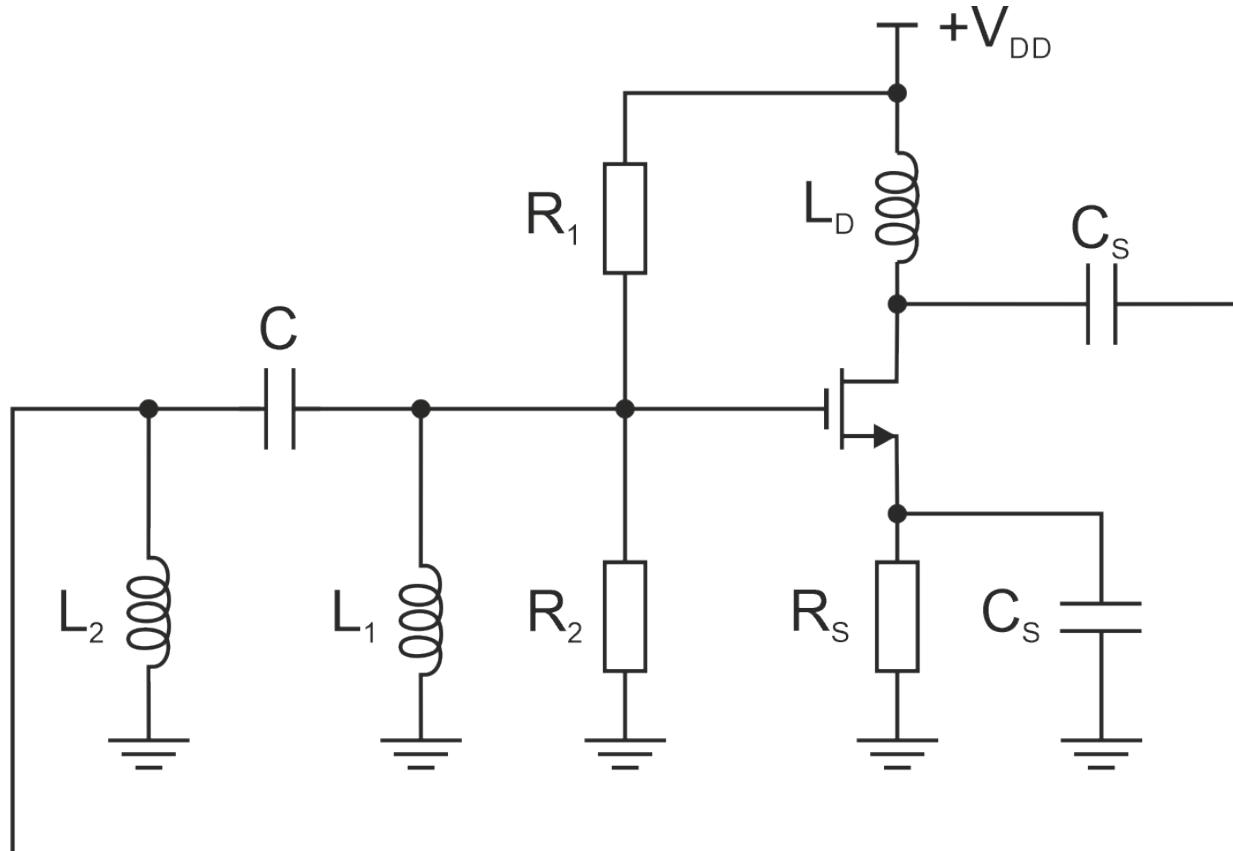
# Kolpicov (Colpitts) oscilator

$$\text{Im} : \left( sC_1 + \frac{1}{sL} \right) \underbrace{\left( g_m + \frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{R_E} \right)}_{G_X} - sC_1 g_m = 0$$

$$\boxed{\frac{C_1}{C_2} = g_m (r_\pi \parallel R_E)}$$

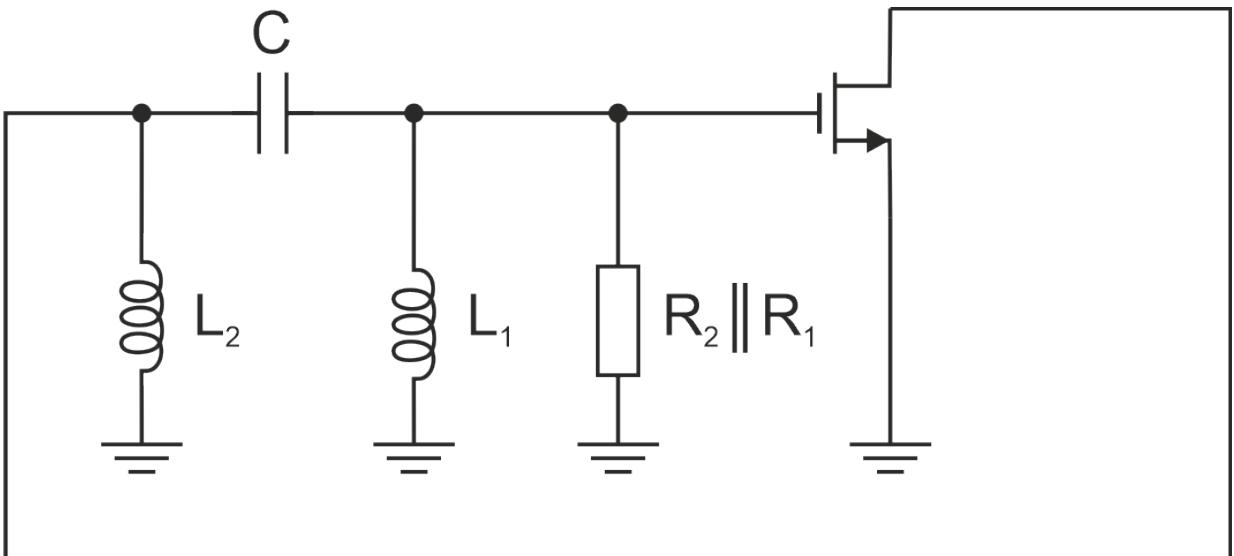
# Hartlijev (Hartley) oscilator

- LC oscilator.
- Pojačavač sa zajedničkom bazom ili emitorm (gejtom ili sorsom).
- Kolo povratne sprege čine kondenzator C i kalemovi  $L_1$  i  $L_2$ .
- $C_S = \infty$ ,  $L_D = \infty$ .
- Otpornici  $R_1$  i  $R_2$  služe za polarizaciju tranzistora.



# Hartlijev (Hartley) oscilator

- Ekvivalentno kolo za naizmenični signal:



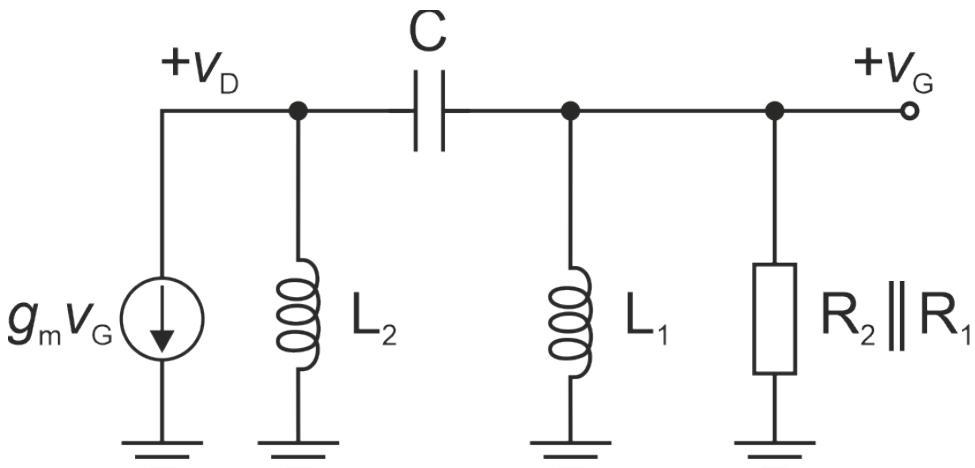
# Hartlijev (Hartley) oscilator

- Model za male signale,  $r_o = \infty$

$$R = R_1 \parallel R_2$$

$$\text{D: } v_D \left( \frac{1}{sL_2} + sC \right) - v_G sC = -g_m v_G$$

$$\text{G: } -v_D sC + v_G \left( \frac{1}{sL_1} + sC + \frac{1}{R} \right) = 0$$



# Hartlijev (Hartley) oscilator

$$D: v_D \left( \frac{1}{sL_2} + sC \right) + v_G (g_m - sC) = 0$$

$$G: -v_D sC + v_G \left( \frac{1}{sL_1} + sC + \frac{1}{R} \right) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1/sL_2 + sC & g_m - sC \\ -sC & 1/sL_1 + 1/R + sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_D \\ v_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Slobodni vektor je nula vektor. Ukoliko je matrica sistema singularna, sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Kolo je nestabilno.

# Hartlijev (Hartley) oscilator

$$\begin{vmatrix} 1/sL_2 + sC & g_m - sC \\ -sC & 1/sL_1 + 1/R + sC \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{s^2 L_1 L_2} + \frac{1}{s R L_2} + \frac{C}{L_2} + \frac{C}{L_1} + \frac{sC}{R} + sCg_m = 0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C(L_1 + L_2)}}$$

$$\text{Re: } \frac{1}{s^2 L_1 L_2} + \frac{C}{L_2} + \frac{C}{L_1} = 0$$

$$-\frac{1}{\omega^2 L_1 L_2} + \frac{C}{L_2} + \frac{C}{L_1} = 0$$

# Hartlijev (Hartley) oscilator

$$\frac{1}{s^2 L_1 L_2} + \frac{1}{s R L_2} + \frac{C}{L_2} + \frac{C}{L_1} + \frac{sC}{R} + s C g_m = 0$$

$$\text{Im: } \frac{1}{s R L_2} + \frac{sC}{R} + s C g_m = 0$$

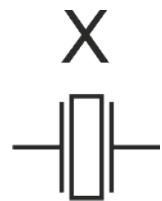
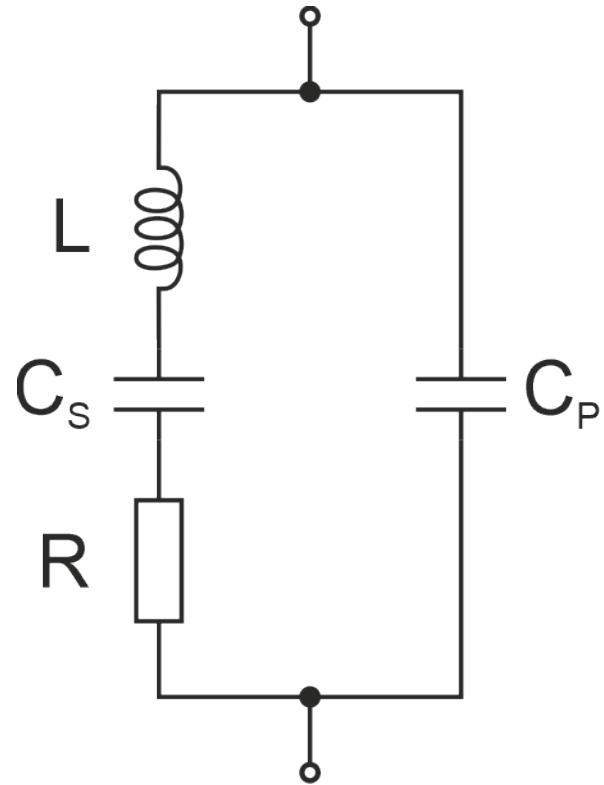
$$-\frac{1}{\omega R L_2} + \frac{\omega C}{R} + \omega C g_m = 0$$

$$g_m R = \frac{L_1}{L_2}$$

# Oscilator sa kristalom kvarca

- Frekvencija oscilovanja LC i RC oscilatora zavisi od temperature, napona napajanja i starenja (tolerancije) komponenti.
- Određene primene zahtevaju preciznu i konstantnu frekvenciju, u tim slučajevima se koriste oscilatori sa kristalom kvarca.
- Kvarc je piezoelektrični materijal koji vibrira na određenoj frekvenciji.
- Frekvencija vibriranja je stabilna u odnosu na promenu temperature ( $\approx 1\text{ppm/K}$ ).
- Kristal kvarca može biti precizno dimenzionisan, tako da je moguće postići željenu rezonantnu frekvenciju sa malom greškom (10ppm).
- Kristal kvarca ima male gubitke.

# Model kristala kvarca



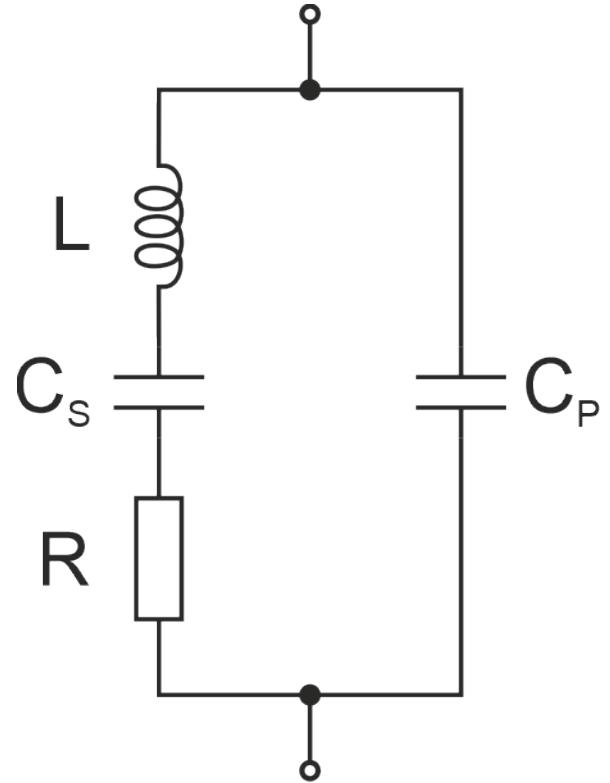
$$L = 1 \div 1000 \text{ mH}$$

$$R = 10 \div 1000 \Omega$$

$$C_p \approx 1 \text{ pF}$$

$$C_s \approx 10^{-15} \div 10^{-13} \text{ F}$$

# Model kristala kvarca

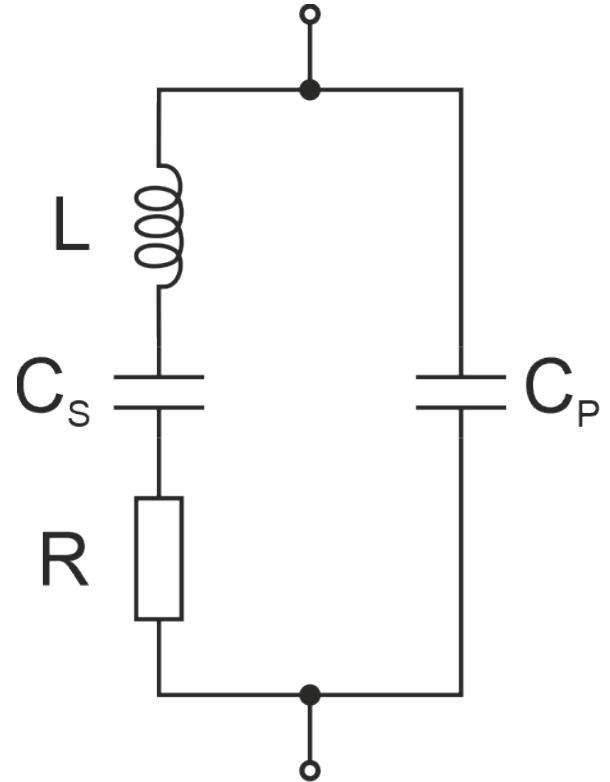


$$Z_X = \left( R + \frac{1}{sC_S} + sL \right) \parallel \frac{1}{sC_P}$$

$$Z_X = \frac{\frac{1}{sC_P} \left( R + \frac{1}{sC_S} + sL \right)}{R + \frac{1}{sC_S} + \frac{1}{sC_P} + sL}$$

$$Z_X = \frac{1 + sRC_S + s^2LC_S}{s(C_S + C_P) + s^2RC_SC_P + s^3LC_SC_P}$$

# Model kristala kvarca



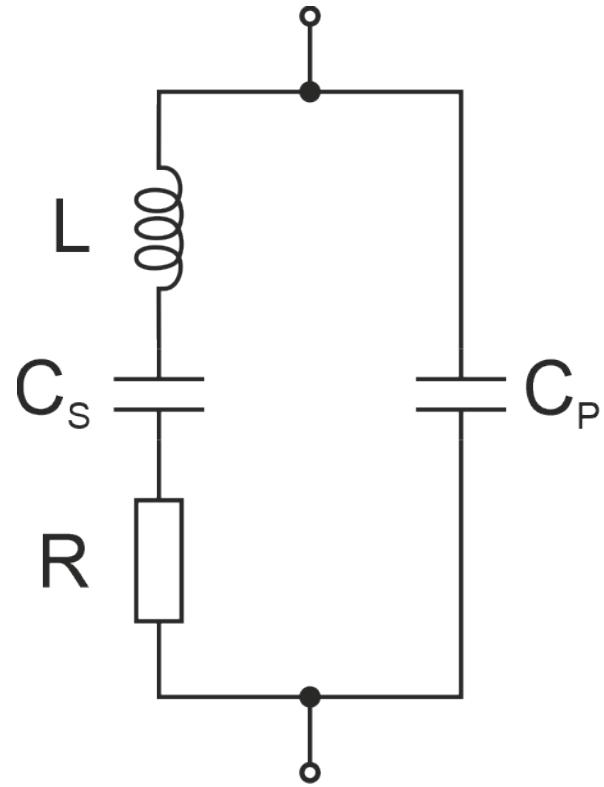
$$Z_X = \frac{1}{s(C_S + C_P)} \frac{1 + sRC_S + s^2LC_S}{1 + sR \frac{C_SC_P}{C_S + C_P} + s^2L \frac{C_SC_P}{C_S + C_P}}$$

$$Z_X = \frac{1}{s(C_S + C_P)} \frac{1 + sRC_S + s^2LC_S}{1 + sRC_X + s^2LC_X} \quad C_X = \frac{C_SC_P}{C_S + C_P}$$

$$\omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC_X}}$$

$$\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC_S}}$$

# Model kristala kvarca



$$Z_X \approx \frac{1}{s(C_s + C_p)} \frac{1 + s^2 LC_s}{1 + s^2 LC_X}$$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC_X}} \quad \omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC_s}}$$

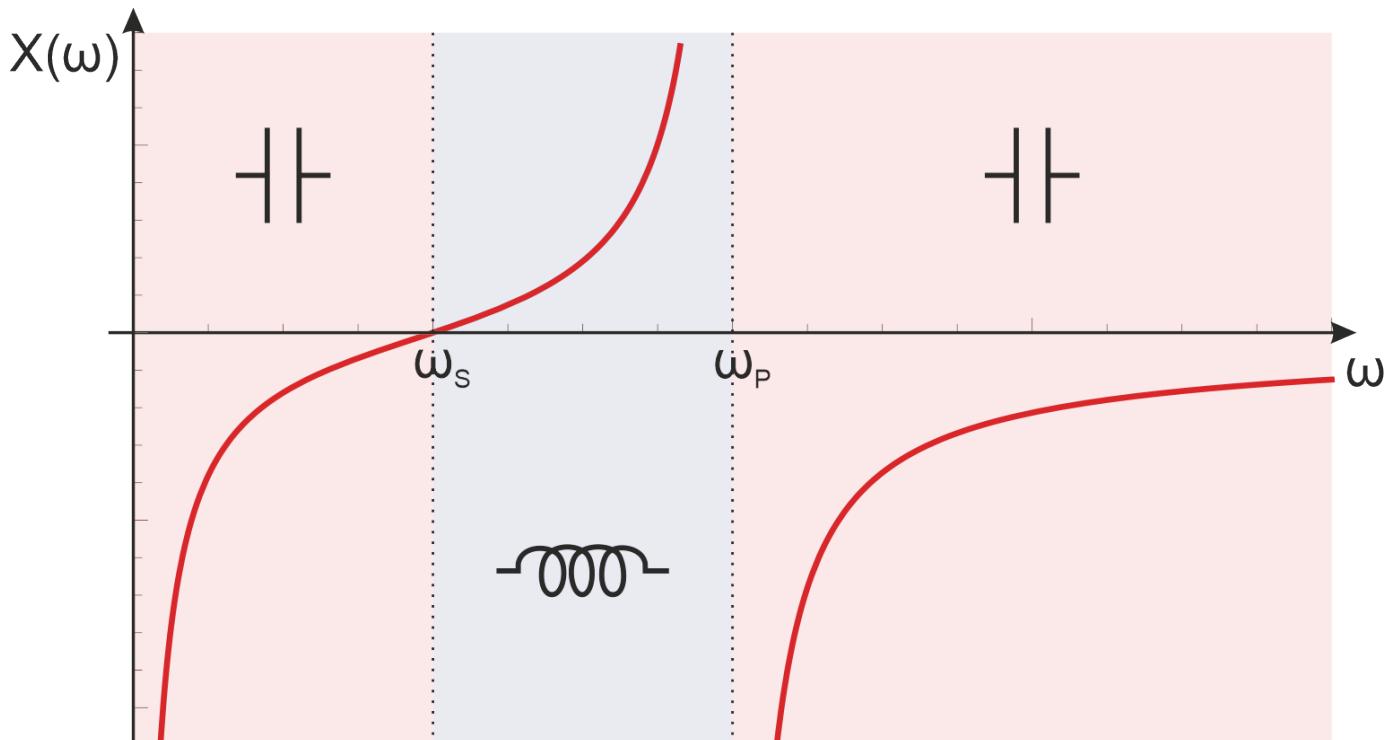
$$Z_X \approx \frac{1}{s(C_s + C_p)} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$$

# Model kristala kvarca

$$Z_X = jX \approx \frac{-j}{\omega(C_S + C_P)} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_S}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)^2}$$

$$X(\omega) \approx -\frac{1}{\omega(C_S + C_P)} \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_S}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)^2}$$

$$\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC_S}} \quad \omega_P = \frac{1}{\sqrt{LC_X}}$$



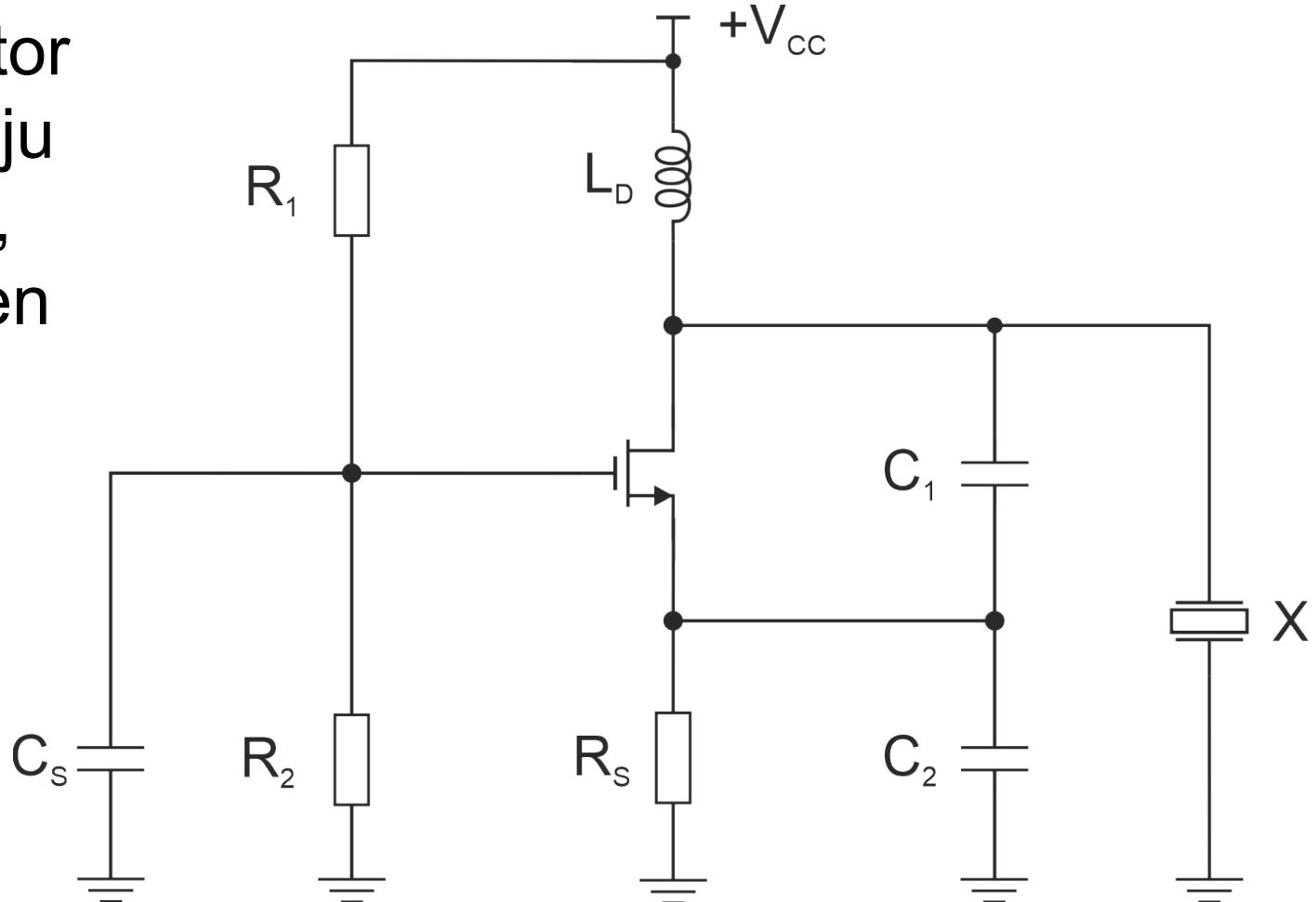
# Pirsov (Pierce) oscilator

- Kristal kvarca ima induktivnu impedansu između rezonantnih frekvencija  $\omega_s$  i  $\omega_p$ .
- Razlika rezonantnih frekvencija  $\omega_s$  i  $\omega_p$  je mala, tako da se kristal ponaša kao kalem za mali opseg frekvencija. Unutar opsega induktivnost se značajno menja.
- U kolima oscilatora kristal kvarca zamenjuje kalem, tako da se frekvencija oscilovanja nalazi između rezonantnih frekvencija. Bira se oblast bliža rezonantnoj frekvenciji  $\omega_p$ , gde promena frekvencije izaziva najveću promenu induktivnosti. Ova osobina kristala kvarca obezbeđuje stabilnost frekvencije oscilovanja.

# Pirsov (Pierce) oscilator

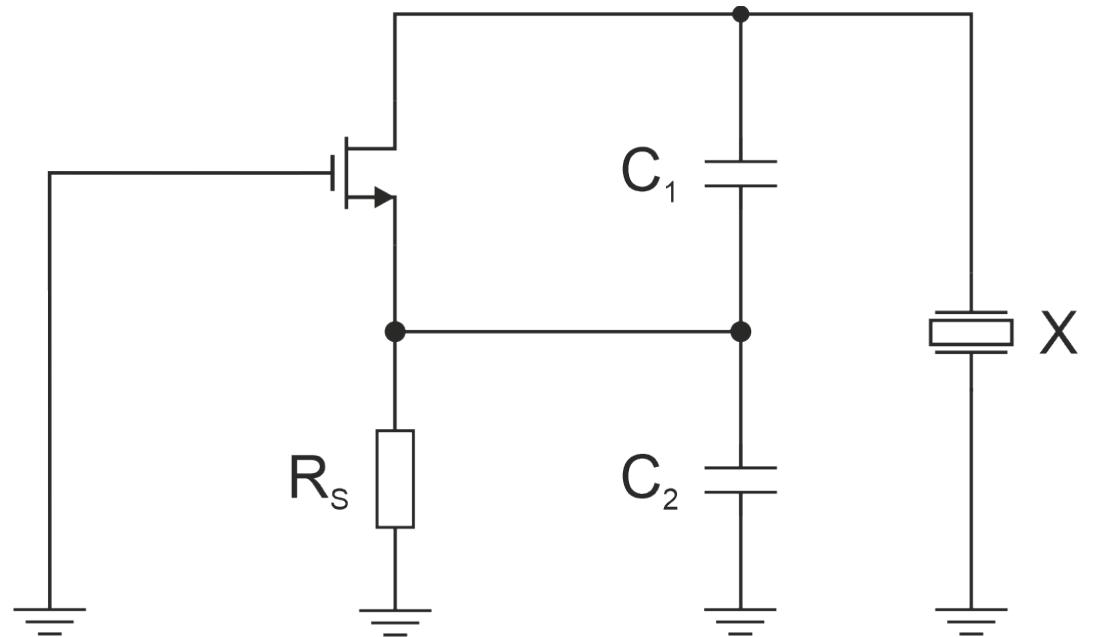
- Pirsov (Pierce) oscilator predstavlja modifikaciju Kolpicovog oscilatora, gde je kalem zamjenjen kristalom kvarca

$$L_D = \infty, C_S = \infty$$



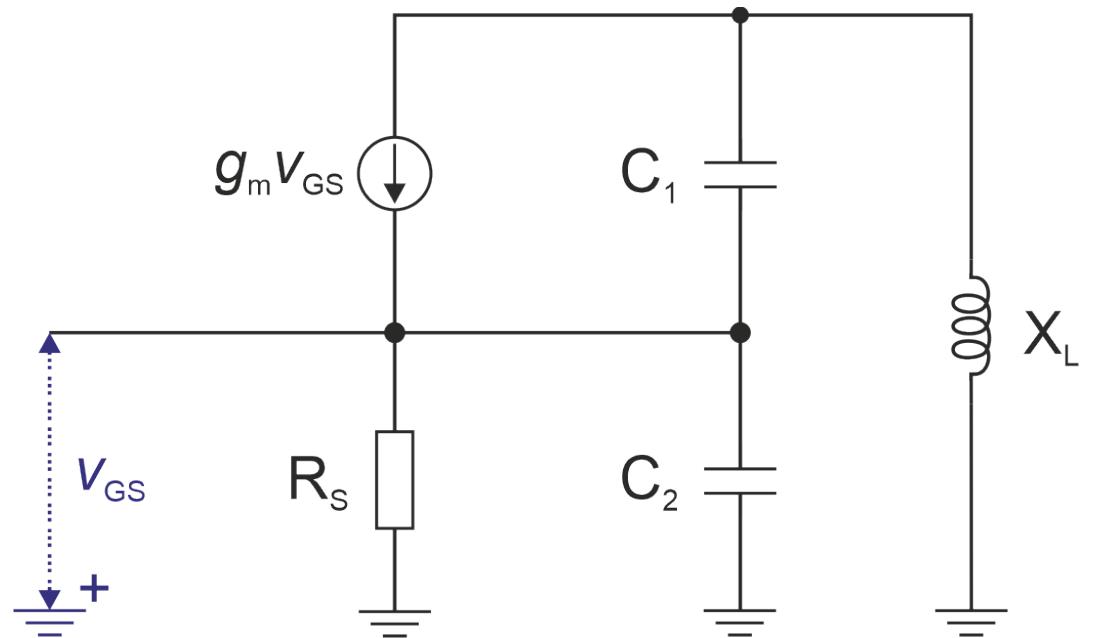
# Pirsov (Pierce) oscilator

- Ekvivalentno kolo za naizmeničan signal:



# Pirsov (Pierce) oscilator

- Model za male signale ( $r_o = \infty$ ):



# Pirsov (Pierce) oscilator

- Pirsov oscilator sa CMOS pojačavačem:

