Frekvencijska analiza pojačavača

Frekvencijska analiza

Prenosna funkcija

U kolu svakog pojačavača postoje reaktivni elementi koji mogu da budu posebne komponente (kondezatori i kalemovi) ili parazitni parametri poluprovodničkih komponenata. Frekvencijski karakteristika pojačavača se obično određuje u funkciji od kompleksne učestanosti s. Pri tome je impedansa svakog kondenzatora ili kapacitivnosti predstavljena kao $\mathrm{Z} = \frac{1}{s \cdot C}$ dok je impedansa induktivnosti $\mathrm{Z} = s \cdot L$. Nakon toga jednačine kola se formulišu na uobičajeni način isto kao kod analize kola bez reaktivnih elemenata. **Prenosna funkcija pojačavača T(s)** je funkcija od kompleksne učestanosti.

$$\mathrm{T}(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

Prenosna funkcija

Zavisno od tipa signala koji se pojačava $T(j\omega)$, može biti naponsko pojačanje A, strujno pojačanje A_s, transkonduktansa G_m, transrezistansa R_m .

$$T(s) = A(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)};$$

$$T(s) = G_m(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)};$$

$$T(s) = A_s(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)};$$

$$T(s) = R_m(s) = \frac{V_o(s)}{I_i(s)};$$

Prenosna funkcija

Prenosna funkcija linearnog kola je racionalna funkcija po kompleksnoj učestanosti s (količnik dva polinoma po s).

$$\boxed{T(s)=\frac{N(s)}{D(s)}}$$

Ukoliko se brojilac i imenilac prenosne funkcije prikaže u obliku polinoma po pojedinim stepenima komplekse učestanosti onda je to razvijeni oblik prenosne funkcije.

$$\boxed{T(s)=\frac{a_0+a_1s+a_2s^2+\ldots+a_ns^n}{b_0+b_1s+b_2s^2+\ldots+b_ms^m}}$$

Kada se brojilac i i menilac prenosne funkcije faktorišu dobija se faktorizovani oblik prenosne funkcije.

$$\boxed{T(s)=\frac{a_n(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_n)}{b_m(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_m)}}$$

Prenosna funkcija

$$\boxed{T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}}$$

Nule polinoma u brojiocu su **nule prenosne funkcije** ($z_1,\ldots,z_n$). Nule prenosne funkcije mogu da budu realne ili konjugovano kompleksni parovi.

$$\boxed{T(s) = \frac{a_n(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_n)}{b_m(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_m)}}$$

Nule polinoma u imeniocu se nazivaju **polovi prenosne funkcije** ($p_1,\ldots,p_m$). Isto kao i nule mogu da budu realne ili se javljaju kao konjugovano kompleksni parovi.

Prenosna funkcija

$$T(s) = \frac{a_n(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_n)}{b_m(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_m)}$$

$$\omega_{zi} = -z_i$$

$$\omega_{pi} = -p_i$$

$$\boxed{T(s) = T_0 \frac{\left(1+\frac{s}{\omega_{z1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{z2}}\right)\dots\left(1+\frac{s}{\omega_{zN}}\right)}{\left(1+\frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{p2}}\right)\dots\left(1+\frac{s}{\omega_{pN}}\right)}}$$

Iz uslova da kolo bude stabilno proizilazi da polovi prenosne funkcije moraju da se nalaze u levoj poluravni kompleksne učestanosti (imaju negativan realni deo). Pored toga i za nule z_i najčešće se usvaja da su u levoj poluravni i ta kola se nazivaju **kola minimalne faze**. Ako su i nule i polovi u levoj poluravni onda važe sledeće relacije: $\omega_{zi} = -z_i$, $\omega_{pi} = -p_i$.

Na osnovu gornjih relacija faktorizovani oblik prenosne funkcije može da bude prikazan i u zavisnosti od **frekvencija nula** ($\omega_{z1},...,\omega_{zN}$) i **frekvencija polova** ($\omega_{p1},...,\omega_{pN}$).

Ovde je prikazana situacija kada su svi polovi realni. U opštem slučaju to ne mora da važi.

Frekvencijske karakteristike

Prenosna funkcija može se izraziti u funkciji od frekvencije kada se **s** zameni sa **j**ω. T(**j**ω) je kompleksna funkcija od frekvencije kojom je definisan odziv pojačavača na prostoperiodični pobudni signal. Moduo i argument prenosne funkcije zavise od frekvencije. Moduo određuje koliko je pojačanje amplitude signala a argument određuje fazni pomeraj između izlaznog i ulaznog signala.

$$V_i(s) = T(s) \cdot V_u(s)$$

$$V_i(j\omega) = T(j\omega) \cdot V_u(j\omega)$$

$$T(j\omega) = |T(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

Frekvencijske karakteristike

Amplitudska karakteristika je zavisnost modula prenosne funkcije od frekvnecije $|T(j\omega)|$

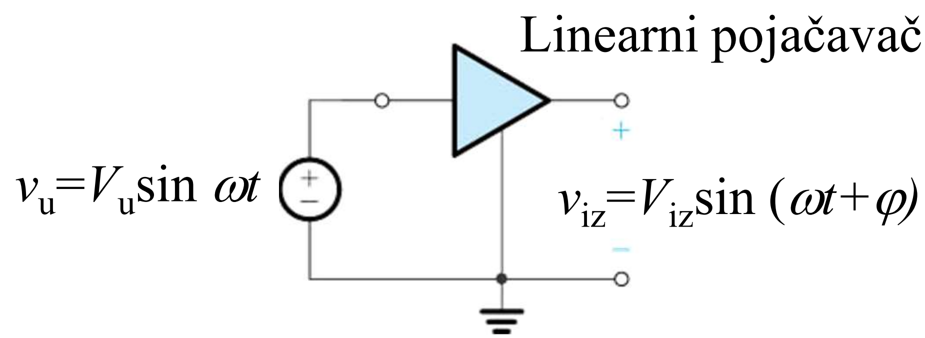
$$|T(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}\{T(j\omega)\}^2 + \mathrm{Im}\{T(j\omega)\}^2} = \sqrt{T(j\omega)\cdot T(-j\omega)}$$

Fazna karakteristika je zavisnost argumenta prenosne funkcije od frekvnecije $|T(j\omega)|$

$$\angle T(\omega) = \phi(\omega) = arctg\left[\frac{\mathrm{Im}\{T(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{T(j\omega)\}}\right]$$

Frekvencijske karakteristike

Važno je utvrditi kakve osobine mora da ima pojačavač da bi mogao da ispuni tražene zahteve



Na izlazu linearnog pojačavača pobuđenog prostoperiodičnim signalom javlja se signal istog oblika, A puta veće amplitude, iste frekvencije a pomerene faze (kasni).

Frekvencijske karakteristike

Ukoliko se na ulaz kola čija je prenosna funkcija T(s) dovodi sinusni signal

$$v_o(t) = V_m \cdot sin(\omega t + \phi)$$

vremenska zavisnost signala na izlazu biće:

$$v_o(t) = V_m \cdot |T(j\omega)| \cdot sin(\omega t + \phi + arg\{T(j\omega)\})$$

Kada je na ulazu sinusni signal i na izlazu će se dobiti sinusni signal iste frekvencije, ω. Amplituda izlaznog signala zavisiće od modula prenosne funkcije, a faza od argumenta prenosne funkcije.

Frekvencijske karakteristike

S obzirom da je prenosna funkcija kompleksna veličina ona se može predstaviti preko modula i argumenta na sledeći način:

$$T(j\omega) = |T(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

Moduo prenosne funkcije je **amplitudska karakeristika** i ona nam govori o tome koliko su se promenile amplitude pojedinih komponenti spektra.

$$A(\omega) = |T(j\omega)| = \left| \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \right|$$

Argument prenosne funkcije je **fazna karakteristika**, koja sadrži informaciju o faznom pomeraju pojedinih komponenti spektra.

$$\varphi(\omega) = \arg(T(j\omega)) = \arg\left\{ \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \right\}$$

Frekvencijske karakteristike

Da bi signal na izlazu bio identičan signalu na ulazu potrebno je da odziv pojačavača ima sledeći oblik:

$$v_o(t) = A \cdot v_o(t - t_0)$$

gde je A pojačanje a t_0 kašnjenje signala na izlazu u odnosu na ulazni signal. Ovaj odziv može se postići ukoliko je amplitudska karakteristika ima konstantnu vrednost

$$\boxed{A(\omega) = A = const.}$$

a fazna karakteristika je linearna funkcija od frekvencije

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arg\{T(j\omega)\} = \omega \cdot t_0}$$

Frekvencijske karakteristike

Frekvencijski odziv pojačavača je odziv na sinusoidne signale različitih frekvencija.
Usled prisustva reaktivnih elemenata (kondenzatora, kalemova) kao i usled činjenice da aktivne komponente poseduju parazitne kapacitivnosti pojačanje pojačavača neće biti isto na svim frekvencijama. Odavde sledi da različite frekvencijske komponente ulaznog signala neće biti identično pojačane. Izobličenja koja potiču od neidealnosti frekvencijske karakteristike pojačavača nazivaju se **linearna izobličenja** jer su posledica prisustva linearnih elemenata. Linearna izobličenja se dele na:

- **Linearna amplitudska**
- **Linearna fazna izobličenja**

Frekvencijske karakteristike

Idealna amplitudska karakteristika ima konstantnu vrednost unutar frekvencijskog opsega signala

$$A(\omega) = |T(j\omega)| = const$$

Amplitudska izobličenja nastaju u pojačavaču čija karakteristika odstupa od idealne.

$$A(\omega) = |T(j\omega)| \neq const$$

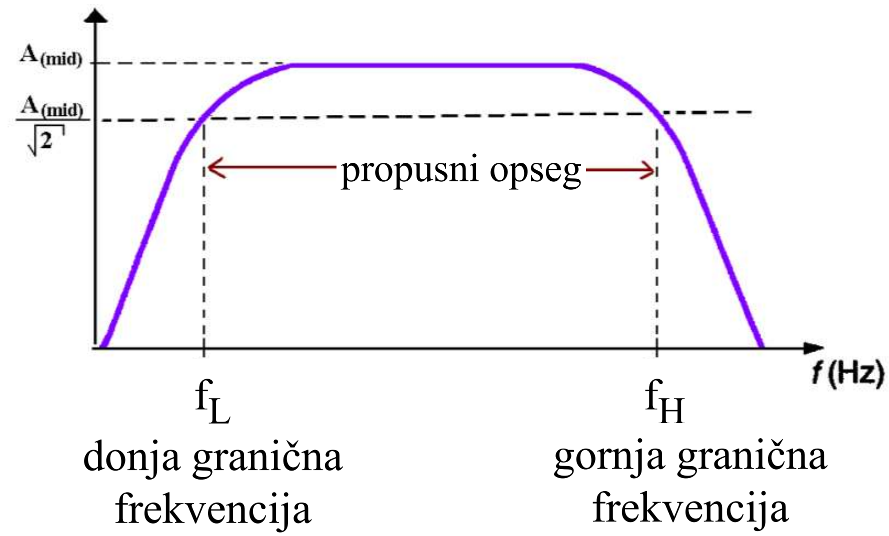
Fazna izobličenja nasataju u pojačavaču čija fazna karakteristika odstupa od idealne

$$\varphi(\omega) = \arg\{T(j\omega)\} \neq \omega \cdot t_0 \pm n\pi$$

Amplitudska karakteristika

Granice propusnog opsega kod realnih pojačavača određuju se u tačkama u kojima **snaga na izlazu opadne za ½ od nominalne**.

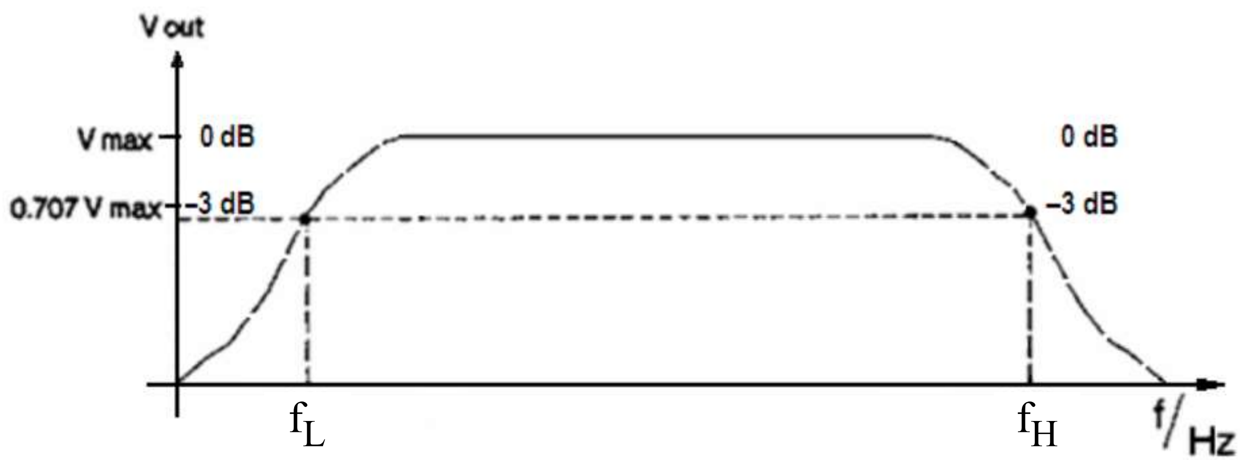
Granična frekvencija je frekvencija na kojoj napon ili struja na izlazu opadnu na $1/\sqrt{2}$ od nominalne vrednosti (smanje se za 3dB kada se razmatra logaritamska razmera).



Amplitudska karakteristika

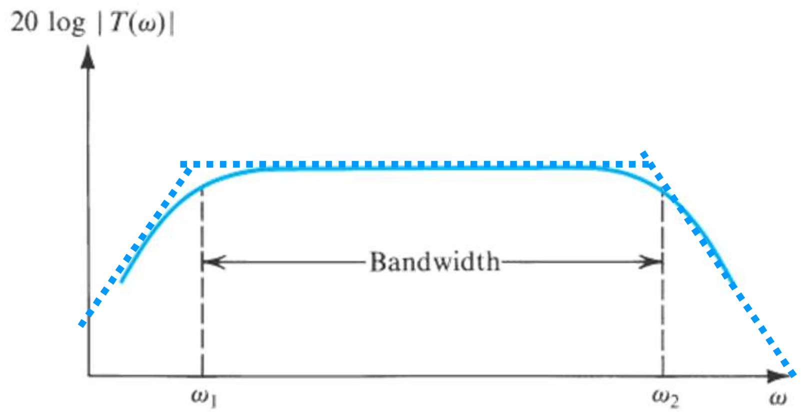
Granice propusnog opsega kod realnih pojačavača određuju se u tačkama u kojima **snaga na izlazu opadne za ½ od nominalne**.

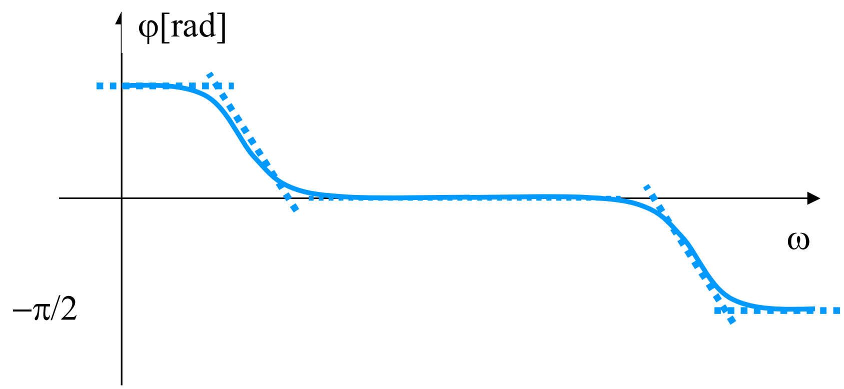
Granična frekvencija je frekvencija na kojoj napon ili struja na izlazu opadnu na $1/\sqrt{2}$ (0,707) od nominalne vrednosti. Ukoliko se koristi logaritamska razmera za amplitudsku karakteristiku onda je pojačanje na graničnoj frekvenciji manje za 3 dB u odnosu na nominalno pojačanje.



Frekvencijske karakteristike realnog pojačavača

Dijagrami koji pojednostavljeno prikazuju amplitudsku i faznu karakteristiku nazivaju se *asimptotske karakteristike* ili *Bodeovi dijagrami*





Hendrik Wade Bode
(1905–1982)

Izražavanje pojačanja u decibelima

$$A = \frac{v_o}{v_i} \qquad A_s = \frac{i_o}{i_i} \qquad A_P = \frac{P_o}{P_i}$$

Da bi prikaz pojačanja koje se kreću u velikom opsegu bio pregledniji koristi se logaritamska skala, odnosno pojačanje se izražava u decibelima. Ovakav prikaz zasniva se na činjenici da je logaritam monotono rastuća funkcija.

$$\boxed{A_{p\_dB} = 10\log|A|}$$ **[dB]**

$$A_{dB} = 20\log|A|$$

$$\mathrm{A}_{s\_\mathrm{dB}} = 20\log|A_s|$$ **[dB]**

Prenosna funkcija

Ukoliko je poznat faktorizovani oblik prenosne funkcije amplitudska karakteristika kola se može izvesti u funkciji od modula pojedinih činilaca.

Amplitudska karakteristika izražena u decibelima, $|T(j\omega)|_{dB}$ jednaka je sumi modula činioca izraženih u decibelima, $|T_i|_{dB}$, pri čemu su činioci u brojiocu sabiraju sa pozitivnim predznakom a činiocu u imeniocu sa negativnim predznakom.

$$T(s) = T_0 \frac{\left(1+\frac{s}{\omega_{z1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{z2}}\right)\dots\left(1+\frac{s}{\omega_{zn}}\right)}{\left(1+\frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{p2}}\right)\dots\left(1+\frac{s}{\omega_{pm}}\right)}$$

$$T(s) = T_0 \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{s}{\omega_{zi}}\right)}{\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{s}{\omega_{pj}}\right)}$$

$$|T(j\omega)| = |T_0| \frac{\prod_{i=1}^{n}\left|\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{zi}}\right)\right|}{\prod_{j=1}^{m}\left|\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{pj}}\right)\right|}$$

$$\boxed{20\cdot\log|T(j\omega)| = 20\cdot log|T_0| + \sum_{i=1}^{n} 20log\left|\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{zi}}\right)\right| - \sum_{i=1}^{m} 20log\left|\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{pj}}\right)\right|}$$

$$\boxed{|T(j\omega)|_{dB} = |T_0|_{dB} + \sum_{i=1}^{n}|T_i|_{dB} - \sum_{i=1}^{m}\left|T_j\right|_{dB}}$$

$$|Z_1\cdot Z_2| = |Z_1|\cdot|Z_2|$$

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

$$\log_{10}(A\cdot B) = \log_{10}(A) + \log_{10}(B)$$

$$\log_{10}\left(\frac{A}{B}\right) = \log_{10}(A) - \log_{10}(B)$$

Prenosna funkcija

$$T(s) = T_0 \frac{\left(1+\frac{s}{\omega_{z1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{z2}}\right)\ldots\left(1+\frac{s}{\omega_{zN}}\right)}{\left(1+\frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{p2}}\right)\ldots\left(1+\frac{s}{\omega_{pN}}\right)}$$

$$T(s) = T_0 \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{s}{\omega_{zi}}\right)}{\prod_{j=1}^{m}\left(1+\frac{s}{\omega_{pj}}\right)}$$

Ukoliko je poznat faktorizovani oblik prenosne funkcije fazna karakteristika kola se može izvesti u funkciji od argumenata pojedinih činilaca.

Fazna karakteristika, $argT(j\omega)$, jednaka je sumi argumenata činioca $argT_i(j\omega)$, pri čemu se činioci u brojiocu sabiraju sa pozitivnim predznakom a činiocu u imeniocu sa negativnim predznakom.

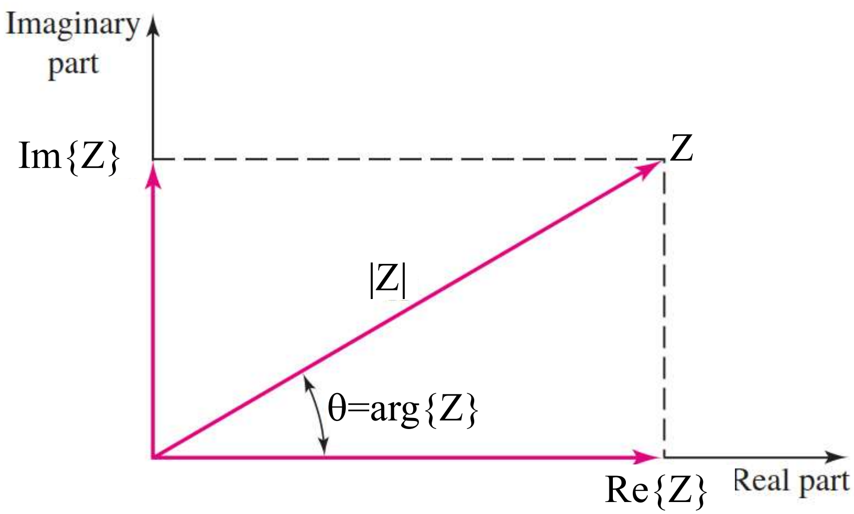
$$\boxed{argT(j\omega) = arg\ T_o + \sum_{i=1}^{n} arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{zi}}\right) - \sum_{i=1}^{m} arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right)}$$

$$\boxed{argT(j\omega) = arg\ T_o + \sum_{i=1}^{n} \arg T_i(j\omega) - \sum_{j=1}^{m} argT_j(j\omega)}$$

$$\arg\{Z_1 \cdot Z_2\} = \arg\{Z_1\} + \arg\{Z_2\}$$

$$\arg\left\{\frac{Z_1}{Z_2}\right\} = \arg\{Z_1\} - \arg\{Z_2\}$$

Prenosna funkcija



$$\arg\{Z\} = arc\tan\frac{Im\{Z\}}{Re\{Z\}}$$

$$|Z| = \sqrt{Re\{Z\}^2 + Im\{Z\}^2}$$

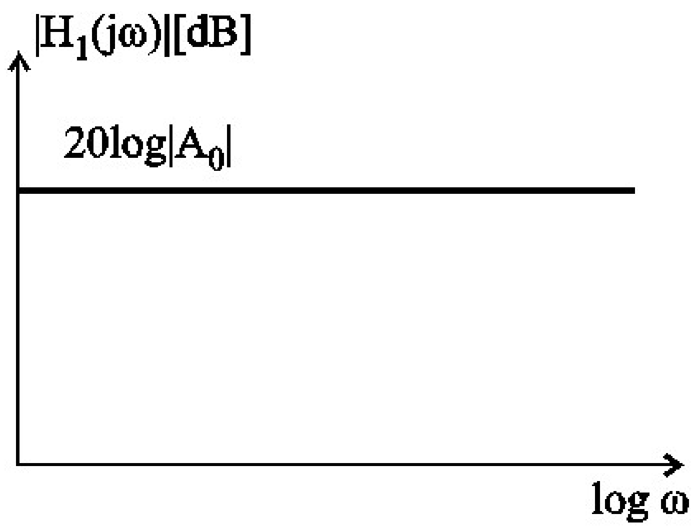
Frekvencijska analiza

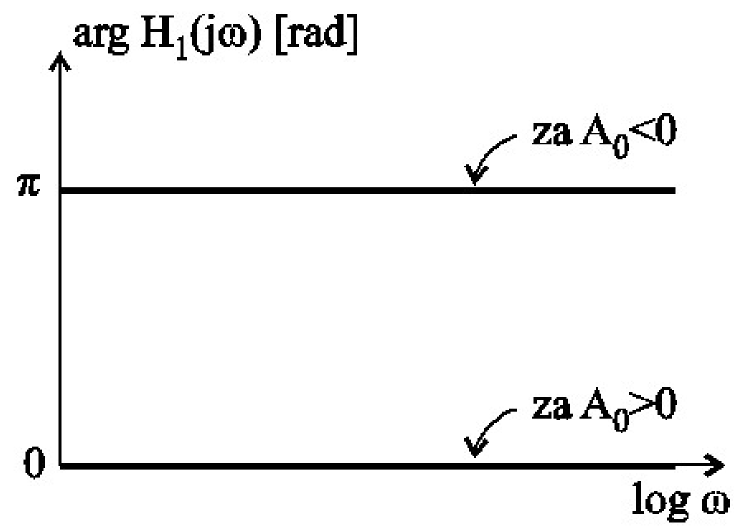
Bodeovi dijagrami

a) Funkcija $H_1(s) = A_0$

$$\left|H_1(j\omega)\right|[dB] = 20\log\left|A_0\right| = 100dB$$

$$\arg H_1(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{za } A_0 > 0 \\ \pi & \text{za } A_0 < 0 \end{cases} = \pi$$





Frekvencijska analiza

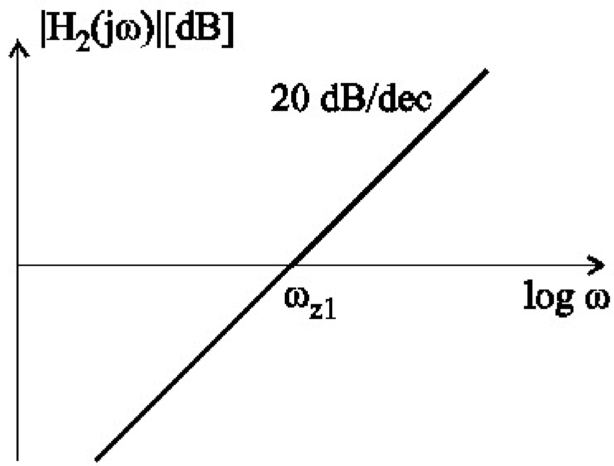
Bodeovi dijagrami

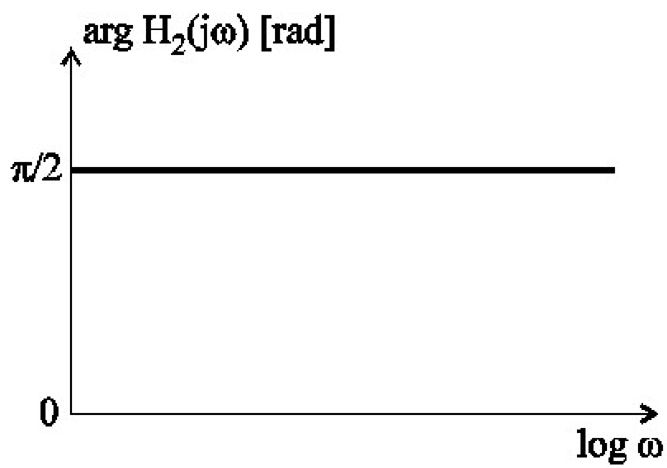
b) Funkcija $H_2(s) = \frac{s}{\omega_{z1}}$

$$|H_2(j\omega)|[dB] = 20\log\frac{\omega}{\omega_{z1}}$$

Ovaj izraz može da se predstavi kao $|H_2(j\omega)|[dB] = 20\log\omega - 20\log\omega_{z1}$, i predstavlja jednačinu prave u log/log razmeri koja ima nulu za $\omega = \omega_{z1}$ i ima nagib od $20\,dB/dec$.

$$\arg H_2(j\omega) = \frac{\pi}{2}$$





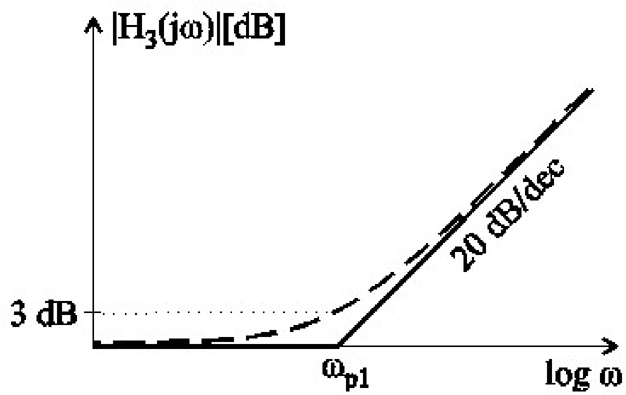
c) Funkcija $H_3(s) = 1 + \frac{s}{\omega_{p1}}$

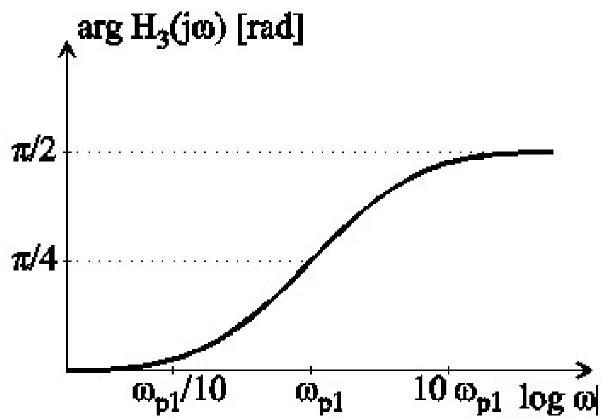
$$\left|H_3(j\omega)\right|[dB] = 20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)^2} \qquad \arg H_3(j\omega) = \mathrm{arctg}\frac{\omega}{\omega_{p1}}$$

Ovu funkciju predstavićemo asimptotskom aproksimacijom, odnosno pravim linijama kojima ova funkcija asimptotski teži za $\omega \to 0$ i $\omega \to \infty$.

Za $\omega << \omega_{p1} \Rightarrow \left|H_3(j\omega)\right|[dB] = 0$

Za $\omega >> \omega_{p1} \Rightarrow \left|H_3(j\omega)\right|[dB] = 20\log\frac{\omega}{\omega_{p1}}$





Frekvencijska analiza

d) Funkcija $H_4(s) = 1 + \frac{s}{\omega_{p2}} + \frac{s^2}{\omega_{p3}^2}$

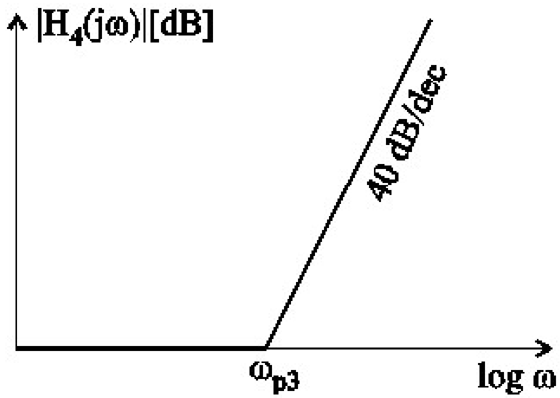
$$\boxed{1 + \frac{s}{\omega_{p2}} + \frac{s^2}{\omega_{p3}^2} \approx \left(1 + \frac{s}{\omega_{p3}}\right)^2}$$

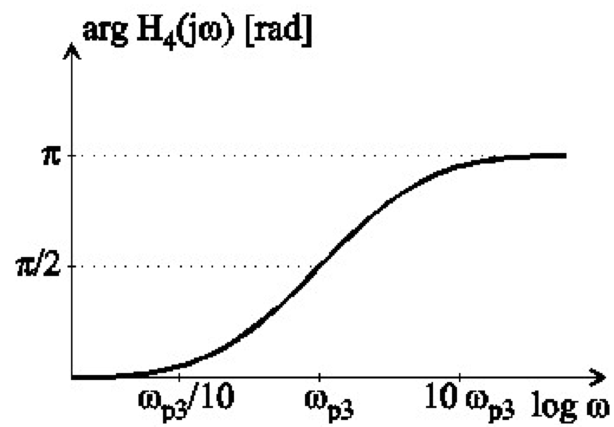
Ukoliko je potrebno analizirati funkciju ovog oblika, neophodno je proveriti da li ona ima realne nule. U tom slučaju ova funkcija se može rastaviti pri čemu se problem svodi na prethodni slučaj. U slučaju da ne postoje realne nule, analiza se obavlja na sledeći način:

$$H_4(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{p3}^2} + j\frac{\omega}{\omega_{p2}}$$

Za $\omega \ll \omega_{p2}, \omega_{p3} \Rightarrow H_4(j\omega) = 1 \Rightarrow |H_4(j\omega)|[dB] = 0$; $\arg H_4(j\omega) = 0$

Za $\omega \gg \omega_{p2}, \omega_{p3} \Rightarrow H_4(j\omega) = -\frac{\omega^2}{\omega_{p3}^2} \Rightarrow |H_4(j\omega)|[dB] = 40 \log \frac{\omega}{\omega_{p3}}$; $\arg H_4(j\omega) = \pi$





Frekvencijska analiza

Bodeovi dijagrami

P r i m e r

Nacrtati asimptotsku aproksimaciju amplitudske i faznu karakteristiku kompleksne funkcije

$$A(s) = A_0 \frac{\dfrac{s}{\omega_{z1}}}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\dfrac{s}{\omega_{p2}}+\dfrac{s^2}{\omega_{p3}{}^2}\right)}$$

Pri čemu je $A_0 = -10^5$; $\omega_{z1} = \omega_{p1} = 100\,\mathrm{rad/s}$; $\omega_{p3} = 10^4\,\mathrm{rad/s}$.

<u>REŠENJE:</u>

Uvodimo oznake:

$$H_1(s) = A_0\,;\; H_2(s) = \frac{s}{\omega_{z1}}\,;\; H_3(s) = 1+\frac{s}{\omega_{p1}}\,;\; H_4(s) = 1+\frac{s}{\omega_{p2}}+\frac{s^2}{\omega_{p3}{}^2}$$

Frekvencijska analiza

Bodeovi dijagrami

Moduo kompleksne funkcije može da se predstavi kao:

$$\left|A(j\omega)\right|[dB] = 20\log\left|A(j\omega)\right|$$
$$= 20\log\left|H_1(j\omega)\right| + 20\log\left|H_2(j\omega)\right| - 20\log\left|H_3(j\omega)\right| - 20\log\left|H_4(j\omega)\right|$$

Odnosno:

$$\left|A(j\omega)\right|[dB] = \left|H_1(j\omega)\right|[dB] + \left|H_2(j\omega)\right|[dB] - \left|H_3(j\omega)\right|[dB] - \left|H_4(j\omega)\right|[dB]$$

Dakle, u log/log razmeri, moduo kompleksne funkcije $A(s)$ dobija se kao zbir modula funkcija $H_i(s)$.

Može se pokazati da i za argumente važi:

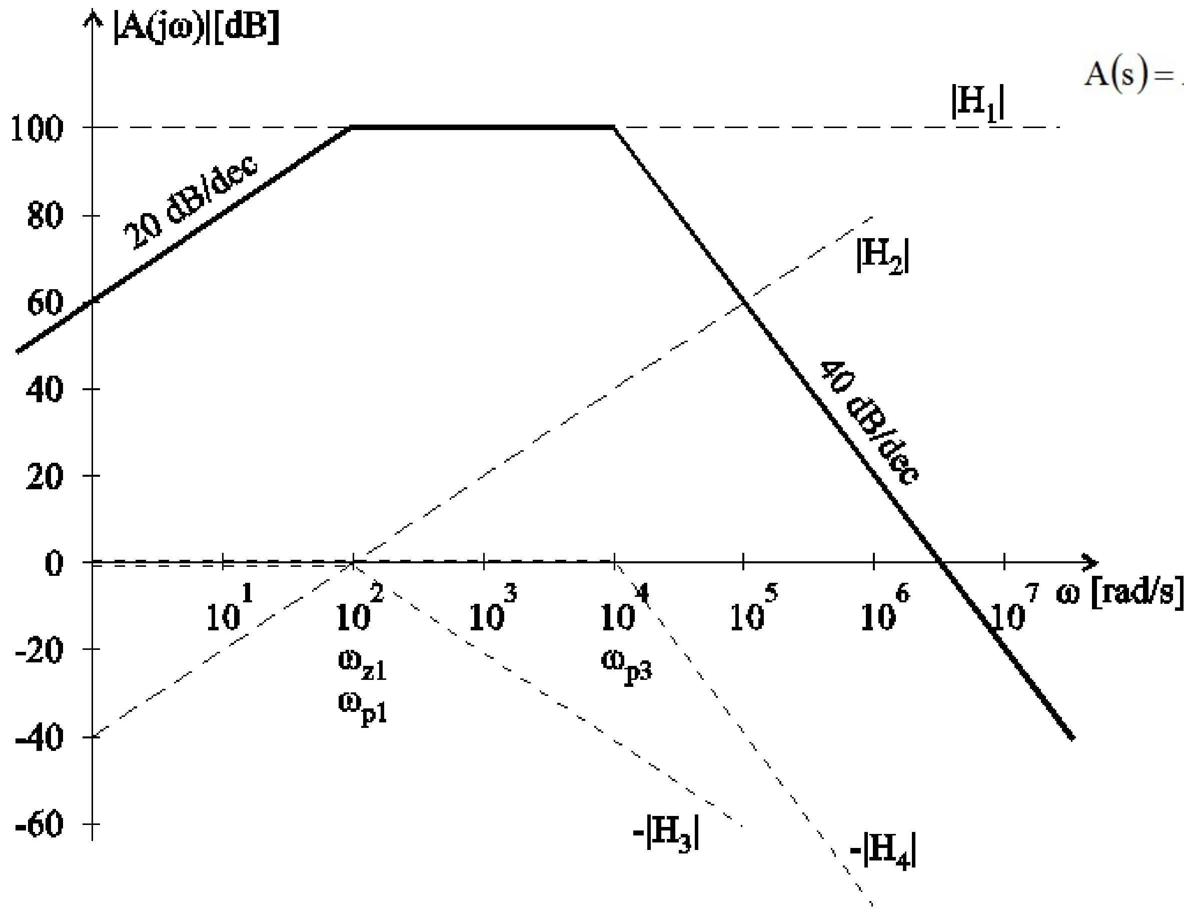
$$\arg A(j\omega) = \arg H_1(j\omega) + \arg H_2(j\omega) - \arg H_3(j\omega) - \arg H_4(j\omega)$$

U nastavku ćemo analizirati moduo i fazu svake od funkcija ponaosob.

Frekvencijska analiza

$$A_0 = -10^5\,;\ \omega_{z1} = \omega_{p1} = 100\,\text{rad/s}\,;\ \omega_{p3} = 10^4\,\text{rad/s}$$

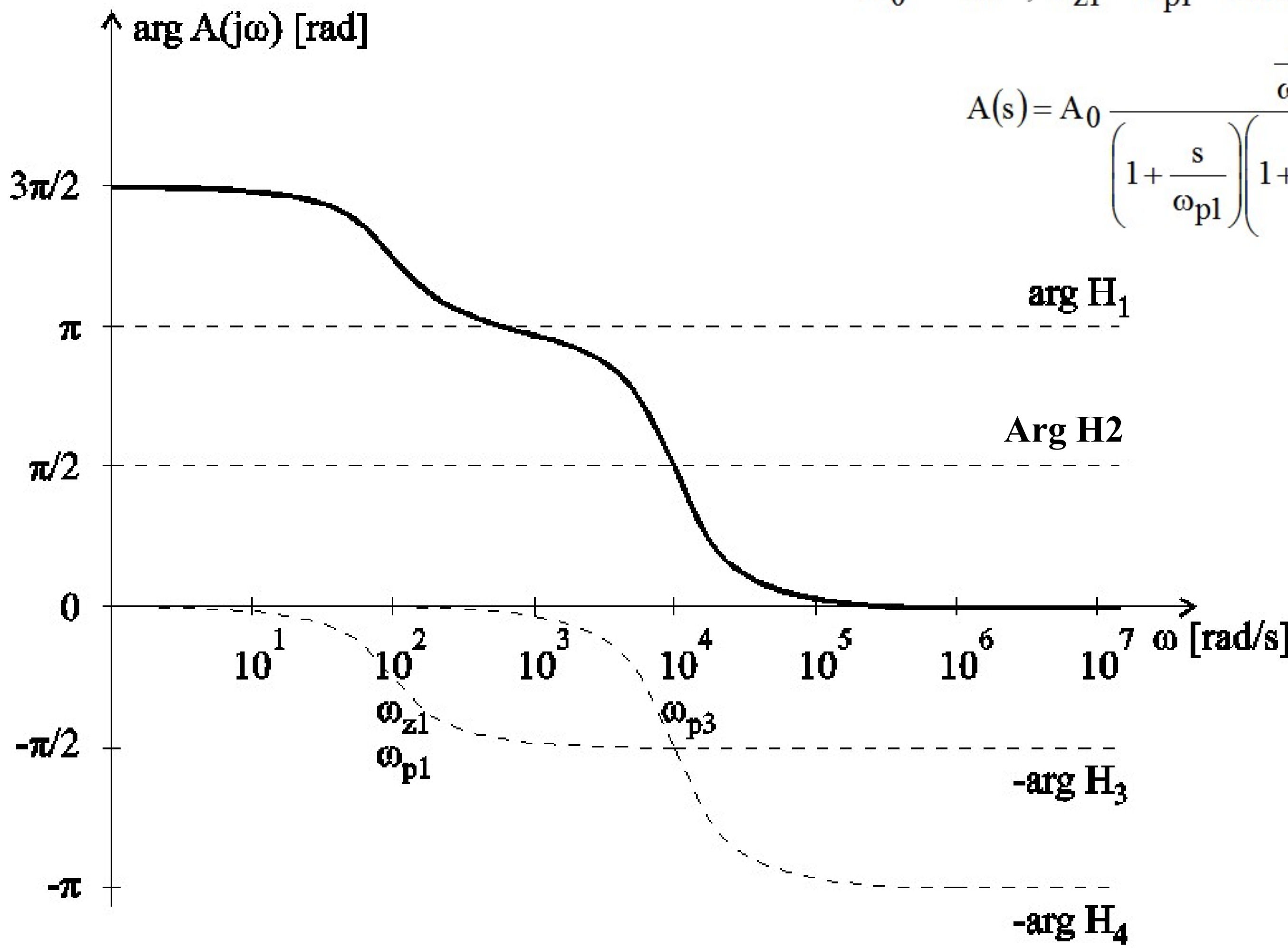
$$A(s) = A_0 \frac{\dfrac{s}{\omega_{z1}}}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\dfrac{s}{\omega_{p2}}+\dfrac{s^2}{\omega_{p3}{}^2}\right)}$$



Frekvencijska analiza

$$A_0 = -10^5\ ;\ \omega_{z1} = \omega_{p1} = 100\,\text{rad/s}\ ;\ \omega_{p3} = 10^4\,\text{rad/s}$$

$$A(s) = A_0 \frac{\dfrac{s}{\omega_{z1}}}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\dfrac{s}{\omega_{p2}}+\dfrac{s^2}{\omega_{p3}{}^2}\right)}$$



RC kolo propusnik visokih frekvencija

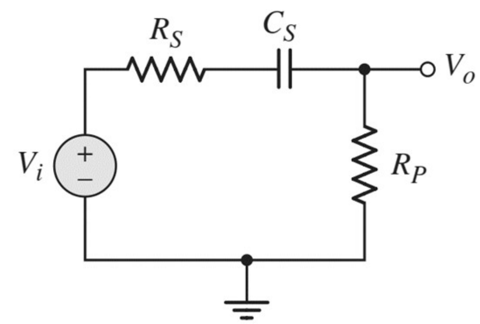
Ukoliko prenosna funkcija teži nuli kada frekvencija teži nuli (kada se kondenzator zameni prekidom) to znači da je kolo propusnik niskih frekvencija.

Prilikom analize kapacitivno spregnutih pojačavača na niskim frekvencijama pojedini delovi kola mogu se predstaviti kao RC kolo propusnik visokih frekvencija.

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_p}{R_S + R_p + \frac{1}{sC_s}}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s \cdot C_S \cdot R_p}{1 + s \cdot C_S(R_S + R_p)}$$

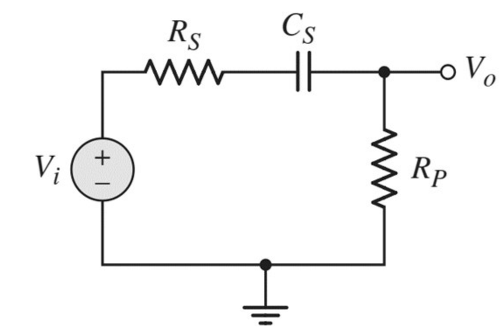
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_p}{R_p + R_s} \cdot \frac{s \cdot C_S \cdot (R_p + R_S)}{1 + s \cdot C_S \cdot (R_S + R_p)}$$



Gde je : $T_o = \frac{R_p}{R_p + R_s}$ $\omega_p = \frac{1}{\left(R_p + R_s\right) \cdot C_S}$ $T(j\omega) = T_o \cdot \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_p}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_p}}$

RC kolo propusnik visokih frekvencija

$$T(j\omega) = T_o \cdot \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_p}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_p}}$$

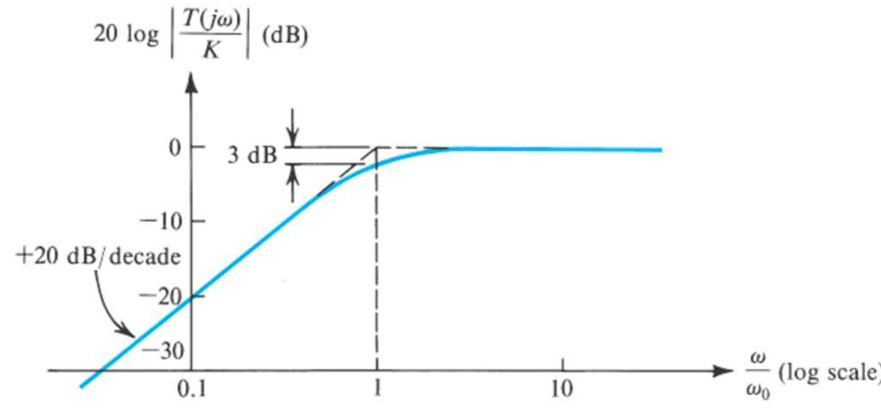


$$T_o = \frac{R_p}{R_p + R_s}$$

T_o je pojačanje na srednjim frekvencijama.

$$\omega_p = \frac{1}{\tau_s} = \frac{1}{(R_p + R_s) \cdot C_S}$$

ω_p je donja granična frekvencija



(a)

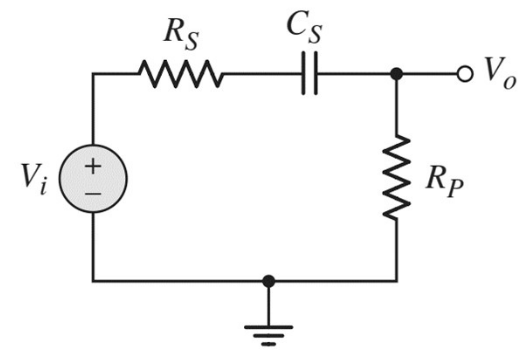
Vremenska konstanta RC kola se može direktno odrediti bez analize kola kao **proizvod kapacitivnosti i ekvivalentne otpornosti između krajeva kondenzatora** (kada se naponski generatori kratko spoje a strujni zamene prekidom).

Granična frekvencija je frekvencija na kojoj pojačanje opadne na 0,707 ($1/\sqrt{2}$) od vrednosti pojačanja na srednjim frekvencijama. Ukoliko se amplitude izražava u decibelima onda pojačanje na graničnoj frekvenciji opadne za 3 dB.

RC kolo propusnik visokih frekvencija

Amplitudska karakteristika

$$T(j\omega) = T_o \cdot \frac{j \cdot \frac{\omega}{\omega_p}}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_p}}$$

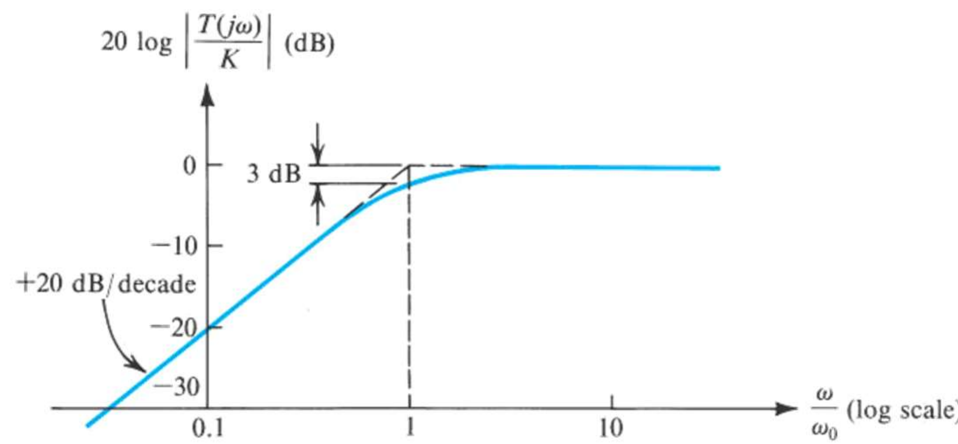


Amplitudska karakteristika je moduo prenosne funkcije:

$$|T(j\omega)| = T_o \cdot \frac{\frac{\omega}{\omega_p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

Amplitudska karateristika se najčešće prikazuje u log-log razmeri. To znači da su i nezavisno promenjiva (frekvencija) i zavisno promenjivao (moduo prenosne funkcije) izraženi u logaritamskoj razmeri. Amplitudska karakteristika se prikazuje u decibelima:

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}|T(j\omega)|$$



(a)

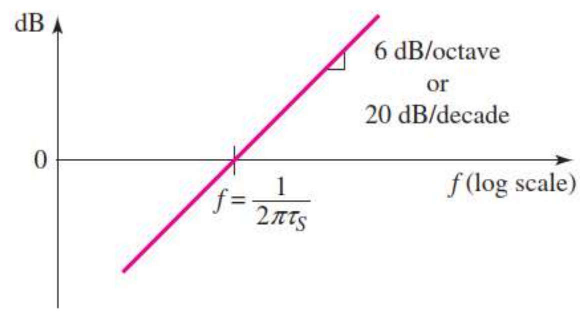
RC kolo propusnik visokih frekvencija

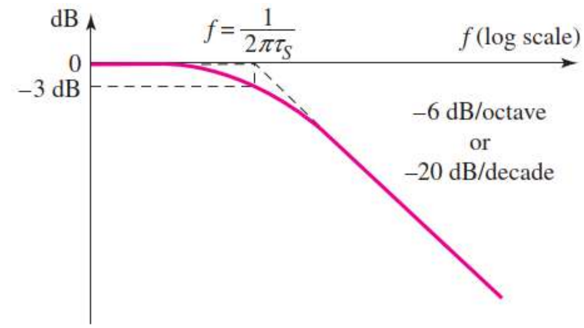
$$T(j\omega) = T_o \cdot \frac{j \cdot \dfrac{\omega}{\omega_p}}{1 + j \cdot \dfrac{\omega}{\omega_p}}$$

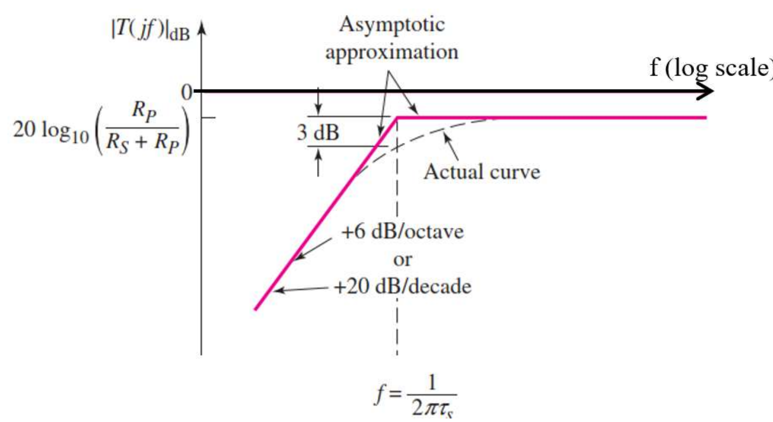
Asimptotska aproksimacija amplitudske karakteristike

Amplitudska karateristika se najčešće izražava u decibelima, odnosno u logaritamskoj razmeri.

$$|T(j\omega)|[dB] = 20 \cdot log_{10}|T_o| + 20log_{10}\left|j\frac{\omega}{\omega_p}\right| - 20log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_p}\right|$$







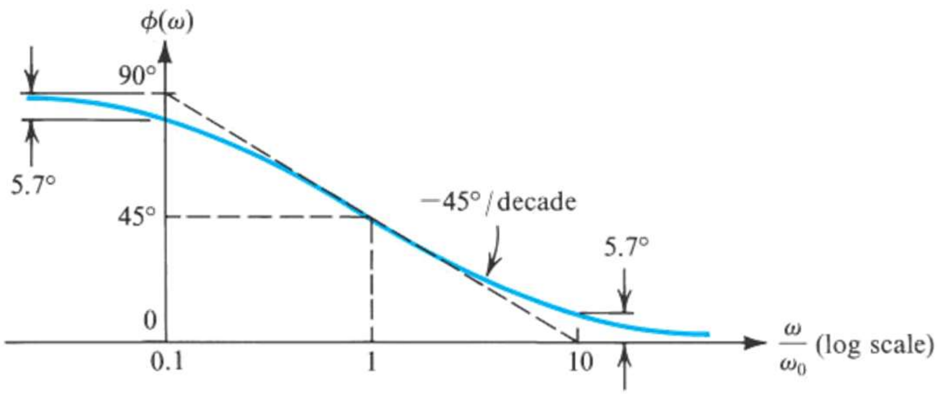
RC kolo propusnik visokih frekvencija

Fazna karateristika je zavisnost argumenta naponskog pojačanja od frekvencije. Koristeći svojstva kompleksnih brojeva fazna karakteristika se može dobiti sabiranjem faznih karakteristika pojedinih činilaca u izrazu za naponsko pojačanje.

$$T(j\omega) = T_o \cdot \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_p}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_p}}$$

$$\arg\{T(j\omega)\} = \arg\left\{j\frac{\omega}{\omega_p}\right\} - arg\left\{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}\right\}$$

$$\arg\{T(j\omega)\} = 90^0 - arctan\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$$

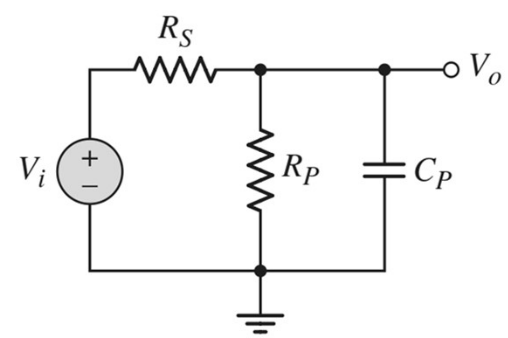


(b)

RC kolo propusnik niskih frekvencija

Ukoliko prenosna funkcija teži nuli kada frekvencija teži beskonačnosti (kada se kondenzator zameni kratkim spojem) to znači da je kolo propusnik niskih frekvencija. Prilikom analize kola na visokim frekvencijama pojedini delovi kola mogu se anlizirati kao RC kolo propusnik visokih frekvencija.

$$\frac{V_o - V_i}{R_S} + \frac{V_o}{R_P} + V_o \cdot sC_p = 0$$



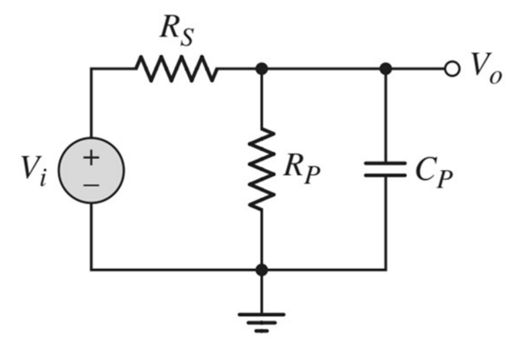
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R_p}{R_S + R_p} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot C_P \cdot \frac{R_S \cdot R_P}{R_P + R_S}}$$

$$T(j\omega) = T_o \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_p}}$$

Gde je : $T_o = \frac{R_S}{R_S + R_P}$ $\quad \omega_p = \frac{1}{\left(R_p \parallel R_s\right) \cdot C_S}$

RC kolo propusnik niskih frekvencija

$$T(j\omega) = T_o \cdot \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}}$$

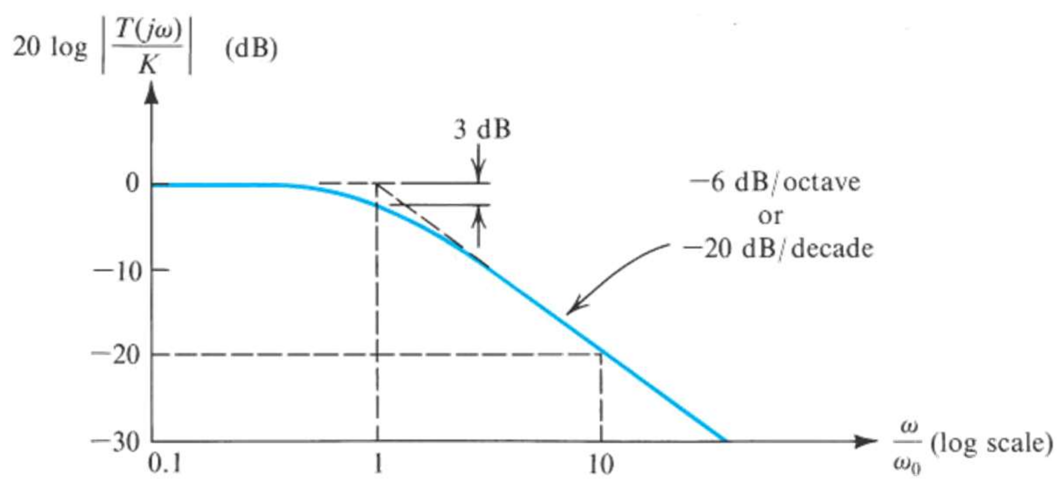


$$T_o = \frac{R_p}{R_p + R_s}$$ T_o je pojačanje na srednjim frekvencijama.

$$\omega_p = \frac{1}{\tau_p} = \frac{1}{(R_p || R_s) \cdot C_S}$$ ω_p je gornja granična frekvencija

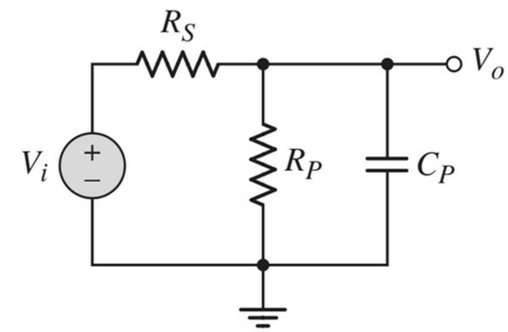
Vremenska konstanta RC kola se može direktno odrediti bez analize kola kao **proizvod kapacitivnosti i ekvivalentne otpornosti između krajeva kondenzatora** (kada se naponski generatori kratko spoje a strujni zamene prekidom).

Granična frekvencija je jednaka recipročnoj vrednosti vremenske konstante.



(a)

Amplitudska karakteristike



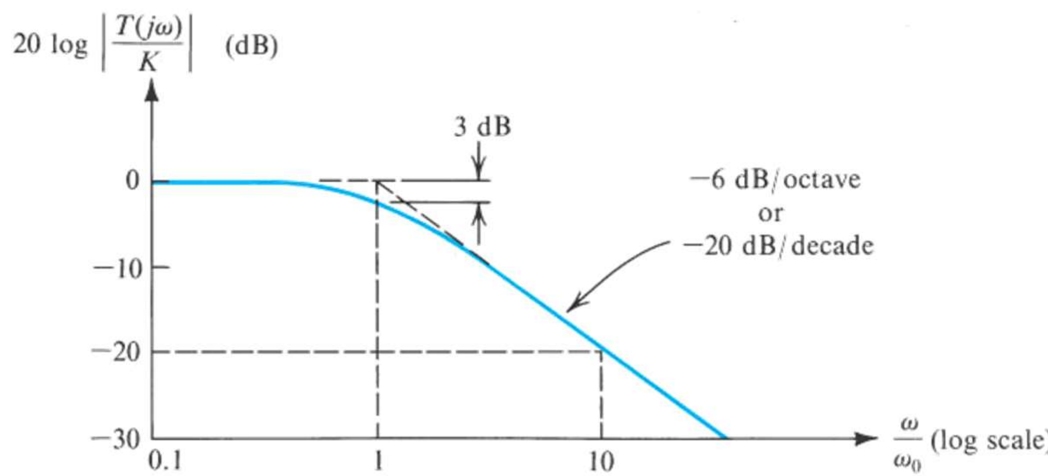
$$T(j\omega) = T_o \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_p}}$$

Moduo prenosne funkcije predstavlja amplitudsku karateristiku.

$$|T(j\omega)| = T_o \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}$$

Amplitudska karateristika se najčešće izražava u decibelima, odnosno u logaritamskoj razmeri.

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}|T(j\omega)|$$



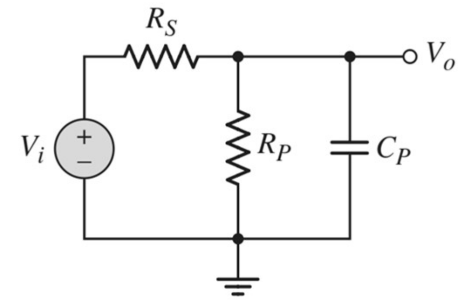
(a)

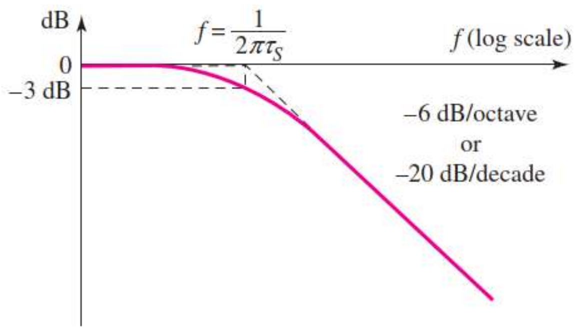
RC kolo propusnik niskih frekvencija

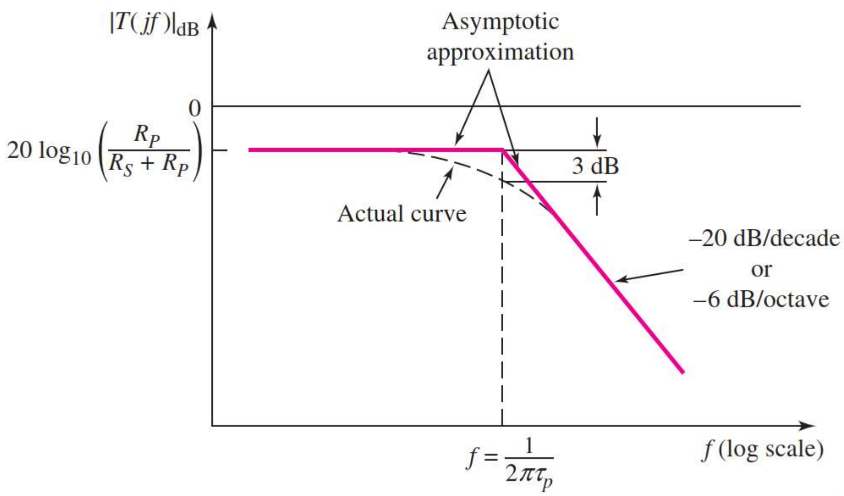
Asimptotska aproksimacija amplitudske karakteristike

$$T(j\omega) = T_o \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_p}}$$

$$|T(j\omega)|[dB] = 20 \cdot log_{10}|T_o| - 20log_{10}\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_p}\right|$$







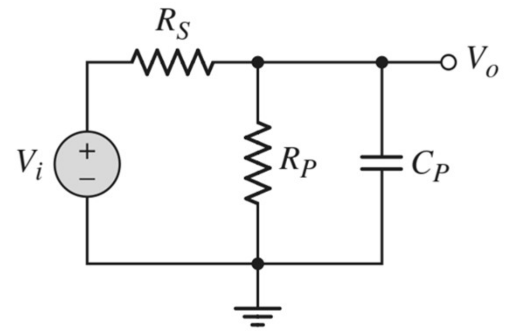
RC kolo propusnik niskih frekvencija

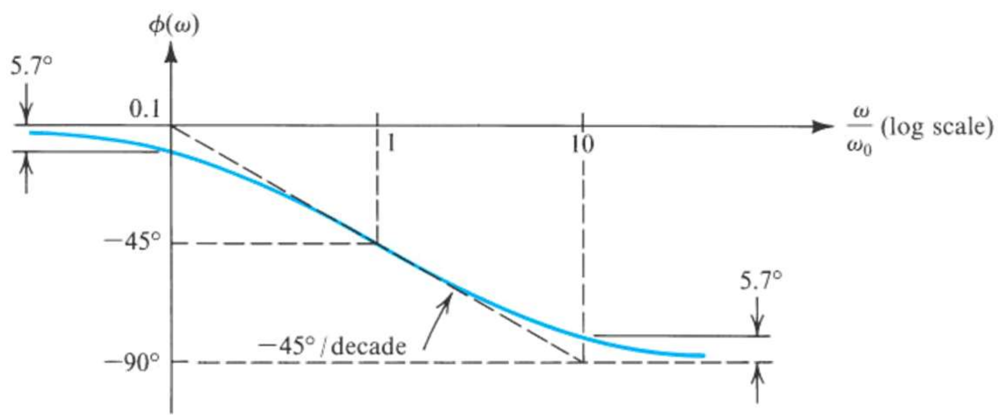
$$T(j\omega) = T_o \cdot \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_p}}$$

Fazna karateristika je zavisnost argumenta naponskog pojačanja od frekvencije. U ovom slučaju postoji samo jedan činilac čiji se argument menja sa frekvencijom.

$$\arg\{T(j\omega)\} = -arg\left\{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}\right\}$$

$$\arg\{T(j\omega)\} = -arctg\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)$$





(b)

Frekvencijska analiza

Primenom simulatori kola, kao što je SPICE, može se dobiti amplitudska ili fazna karakteristika kola za zadate prametre kola. Iako su ove karakteristike korisne one ne pružaju dovoljno informacija o uticaju pojedinih elemenata kola na karakteristike kola.

Određivanje prenosne funkcije pojačavača bez korišćenja simulatora je u najvećem broju slučajeva neizvodljivo zbog kompleksnosti postupka. Zato se umesto generisanja prenosne funkcije prilikom projektovanja određuju:

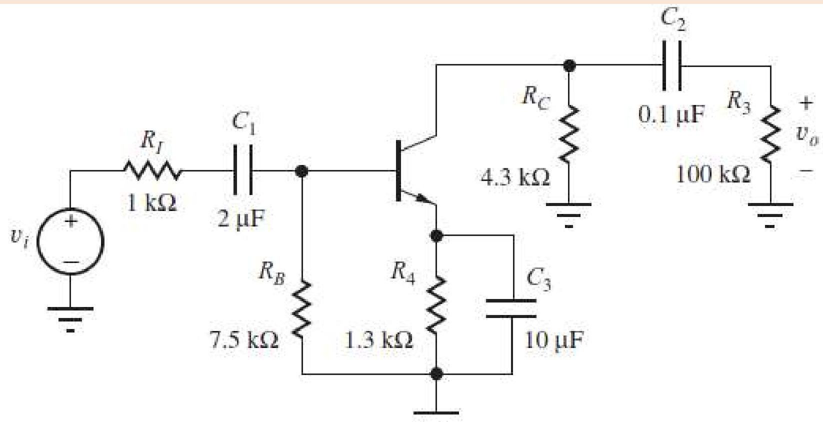
- pojačanje na srednjim frekvencijama A_m
- donja granična frekvencija ω_L
- gornja granična frekvencija ω_H.

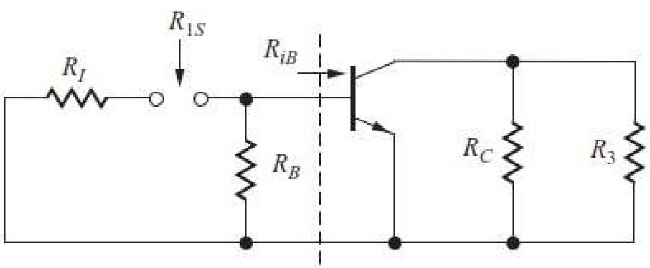
Za određivanje donje granične frekvencije primenjuje se **metod vremenske konstante kratkog spoja**. Prema ovom metodu donja granična frekvencija kola se može približno odrediti kao:

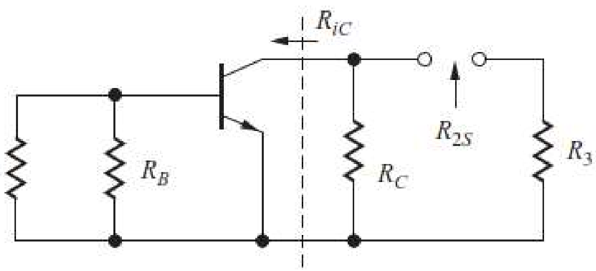
$$\omega_L \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{is} \cdot C_i}$$

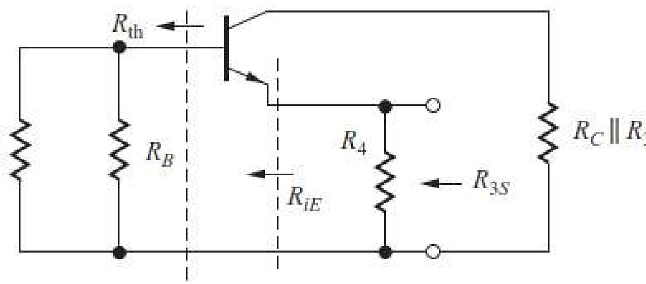
Gde je n – broj kondenzatora u kolu, C_i kapacitvnost kondenzatora sa indeksom i, R_{is} ekvivalentna otpornost koja se vidi sa krajeva kondenzatora C_i kada se kratkospoje svi ostali kondenzatori u kolu.

Frekvencijska analiza









$$R_{1S} = R_I + (R_B \| R_{iB}) = R_I + (R_B \| r_\pi)$$

$$\omega_{L1} = \frac{1}{C_1 \cdot R_{1S}}$$

$$R_{2S} = R_3 + (R_C \| R_{iC}) = R_3 + (R_C \| r_o) \cong R_3 + R_C$$

$$\omega_{L2} = \frac{1}{C_2 \cdot R_{2S}}$$

$$R_{3S} = R_4 \parallel R_{Ie} = R_4 \parallel \frac{r_\pi \parallel R_I \parallel R_B}{\beta + 1}$$

$$\omega_{L3} = \frac{1}{C_3 \cdot R_{3S}}$$

$$\omega_L \cong \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{R_{iS} C_i} = 222 + 96.1 + 4300 = 4620 \text{ rad/s}$$

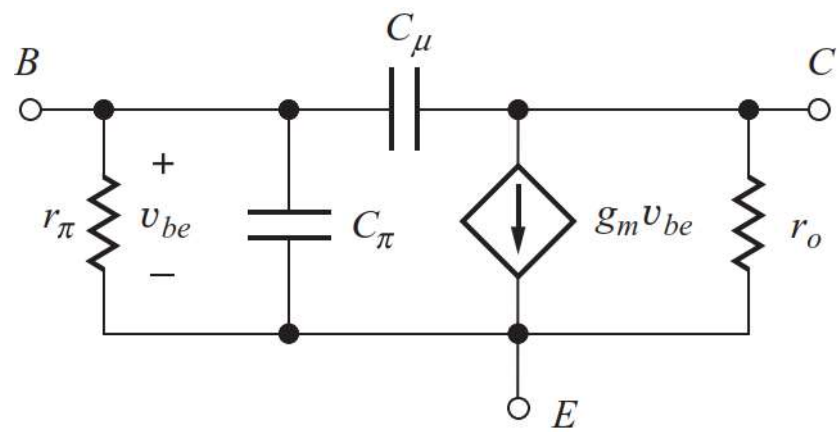
Za određivanje gornje granične frekvencije primenjuje se **metod vremenske konstantne otvorene veze**. Prema ovom metodu gornja granična frekvencija kola se može približno odrediti kao:

$$\omega_{\mathrm{H}} \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} R_{io} \cdot C_i}$$

Gde je m – broj parazitnih kapacitivnosti u kolu, C_i kapacitvnost sa indeksom i, R_{io} ekvivalentna otpornost koja se vidi sa krajeva kapacitivnosti C_i kada se sve ostale kapacitivnosti zamene prekidima (otvorena veza).

Hibridni pi model bipolarnog tranzistora

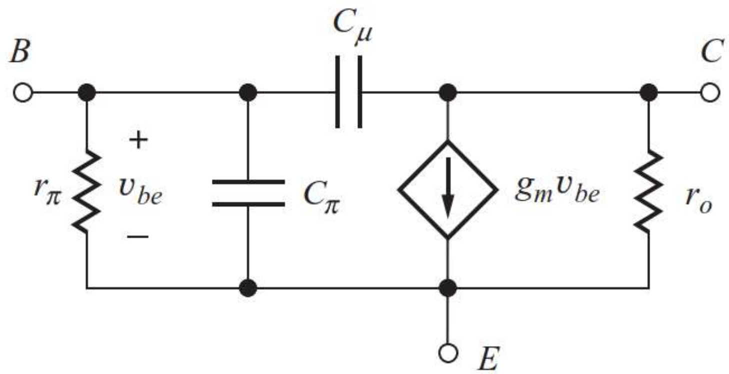
U svim elektronskim komponentama se javljaju kapacitivnosti između određenih priključaka. Ove kapacitivnosti deluju na takav način da na visokim frekvencijama umanjuju pojačanje komponente.
U bipolarnom tranzistoru se pojavljuju dve parazitne kapacitivnosti: **C**$_\pi$ na emitorskom pn spoju i
C$_\mu$ na kolektorskom pn spoju.



Difuziona kapacitvnost emitorskog pn spoja C$_\pi$ se pojavljuje u paraleli sa difuzionom otpornošću. Ovo praktično znači da će usled prisustva ove kapacitivnosti na visokim frekvencijama doći do smanjenja struje koja protiče kroz difuzionu otpornost a samim tim i do smanjenja pojačanja.

Kapacitivnost prostornog naelektrisanja kolektorskog pn spoja C$_\mu$ se pojavljuje između ulaznog priključka (baza) i izlaznog priključka (kolektor). Na visokim frekvencijama praktično dolazi do spajanja ulaza i izlaza. Ova kapacitivnost se primenom Milerova teoreme obično prikazuje preko dve kapacitivnosti, jedne na ulaznom pristupu (između baze i emitora) i druge na izlaznom pristupu (između kolektora i emitora).

VF model bipolarnog tranzistora



Difuziona kapacitvnost direktno polarisanog emitorskog pn spoja, $\mathbf{C_\pi}$, modelira variranja koncentracije manjinskih nosilaca naelektrisanja u području baze usled promene napona na emitorskom pn spoju, v_{BE}. Tipična vrednost kapacitvnost C_π je destak pF i linearno je srazmerna struji kolektora.

$$C_\pi = \tau_F \cdot g_m = \frac{\tau_F \cdot I_C}{V_T}$$

Gde je τ_F vreme preleta nosilaca naelektrisanja . Ova veličina praktično predstavlja prosečan vremenski interval potreban nosiocima naelektrisanja da prođu kroz oblast baze.

Kapacitivnost prostornog naelektrisanja kolektorskog pn spoja C_μ modelira promenu širine prelazne oblasti usled promene napona inverzne polarizacije na kolektorskom pn spoju. Vrednost ove kapacitivnosti kreće se od 2 pF do 10 pF. C_μ u određenoj meri zavisi od napona V_{CE}.

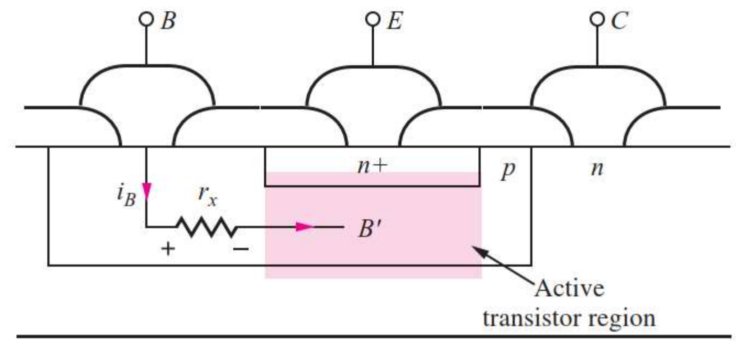
$$C_\mu = \frac{C_{\mu 0}}{\left(1 + \frac{V_{CB}}{V_{0C}}\right)^m}$$

gde je $C_{\mu o}$ kapacitivnost pri nultom naponu polarizacije,
V_{OC} je napon na kolektorskom pn spoju kada tranzistor nije polarisan.
m – parametar koji zavisi od geometrije pn spoja, kreće se u opsegu od 0,3 do 0,2.

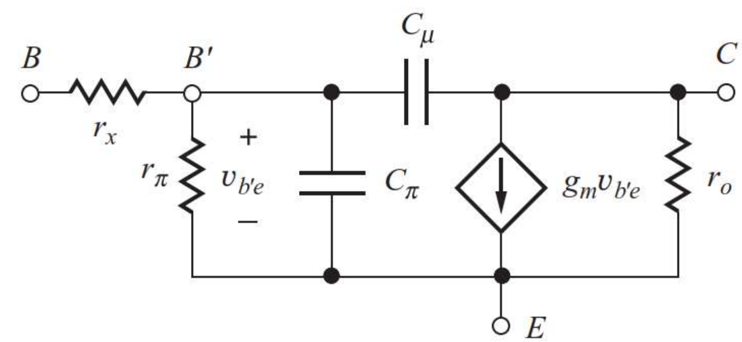
Frekvencijska analiza

Otpornost tela baze

U poprečnom preseku tranzistora može se uočiti da struja baze prilikom proticanja od spoljnjeg kontakta do aktivne oblasti tranzistora prolazi kroz oblast poluprovodnika čija je otporonost relaitvno velika. Da bi se modelovao pad napona koji stvara struja baza prilikom prolaska kroz ovu oblast uvodi se parametar koji se zove **otpornost tela baze**, $\mathbf{r_x}$.



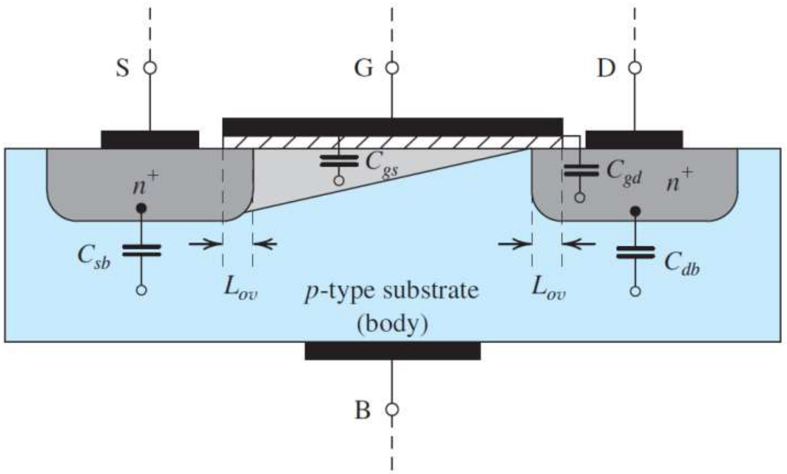
Otpornost tela baze $\mathbf{r_x}$ je parameter koji modeluje pad napona struje baze prilikom prolaska kroz poluprovodnik između spoljnjih priključaka i aktivne oblasti tranzistora.



Tipična vrednost otpornosti tela baze je od nekoliko oma do nekoliko stotina oma. Prilikom analize na niskim frekvencijama otpornost tela baze se zanemaruje jer je vezana na red sa difuzionom otpornošću u odnosu na koju ima mnogo manju vrednost, $r_x \ll r_\pi$.
Na viskim frekvencijama kada moraju da se uzmu u obzir i parazitne kapacitivnosti C_π i C_μ uticaj otpornosti tela baze nije zanemariv.

VF model za MOSFET

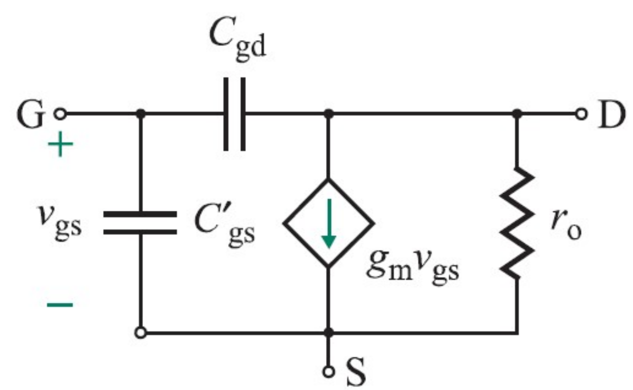
S obzirom da se balk i sors spajaju i da je C_{DB} zanemarivo dominantan uticaj imaće samo kapacitivnosti C_{GS} i C_{GD}.
Na slici je prikazan pojednostavljeni model MOSFET-a za visokofrekvncijsku analizu.



U aktivnoj oblasti rada kapacitivnost C_{GD} nastaje usled prekrivanja oblasti drejna gejtom.

Kapacitvnost C_{GS} čine dve komponente, jedna komponenta nataje usled prekrivanja između gejta i sorsa (označeno sa L_{ov} na slici). Druga komponenta kapacitvnosti C_{GS} predstavlja kapacitivnost između gejta i kanala i ona se može u aktivnoj oblasti rada odrediti iz jednačine:

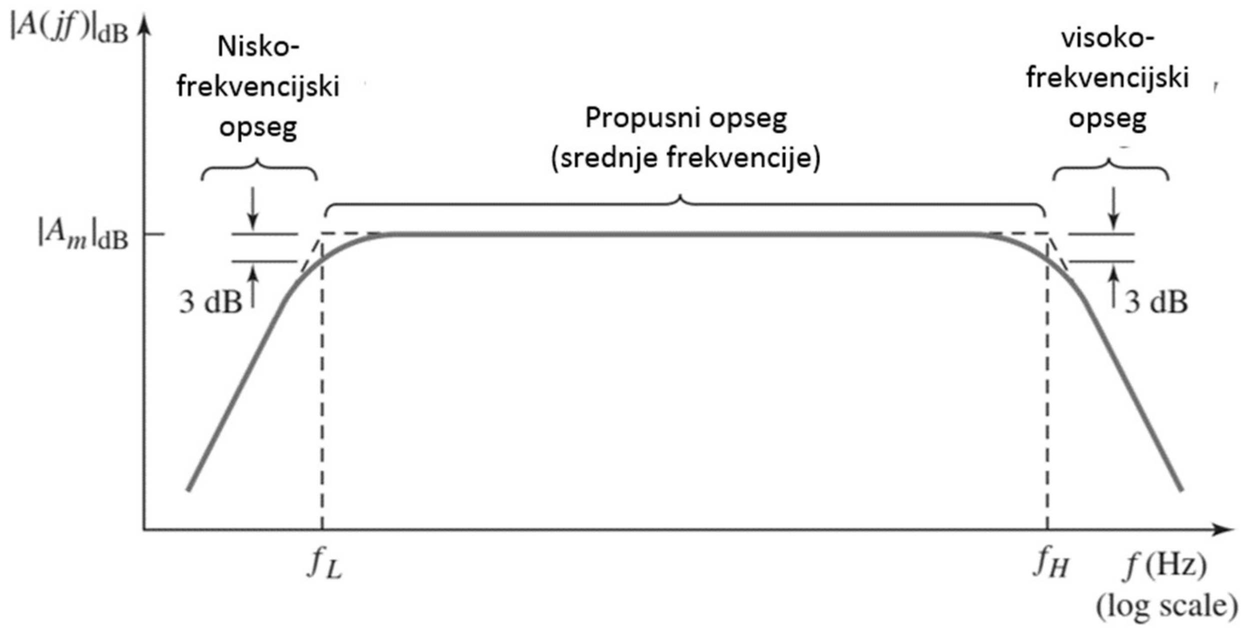
$$C_{GS} = \frac{2}{3} \cdot W \cdot \mathrm{L} \cdot C_{ox}$$



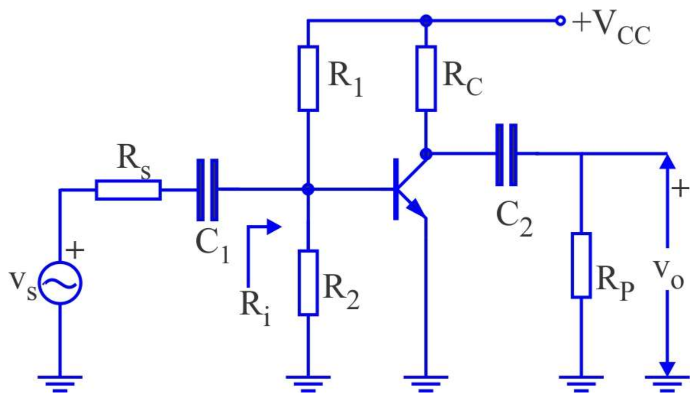
Tipične vrednosti kapacitivnosti C_{GS} i C_{GD} su u opsegu od 1pF do 10 pF.

Frekvencijska analiza

Nisko-frekvencijski opseg obuhvata frekvencija na kojima dolaze do izražaja samo veće kapacitivnosti a to su kapacitivnosti kondenzatora za spregu između pojedinih pojačavačkih stepena.
Visoko-frekvencijski opseg obuhvata frekvencija na kojima se uzimaju u obzir samo male kapacitivnosti a to su parazitne kapacitivnosti poluprovodničkih elemenata.
Srednje frekvencijski opseg obuhvata frekvencija na kojima se svi kapaciteti mogu zanemariti. Sprežne kapacitivnosti se zanemaruju jer su im admitanse toliko velike da predstavljaju kratak spoj. Parazitne kapacitivnosti se zanemaruju jer im je admitansa suviše mala pa predstavljaju prekid.



Frekvencijska analiza

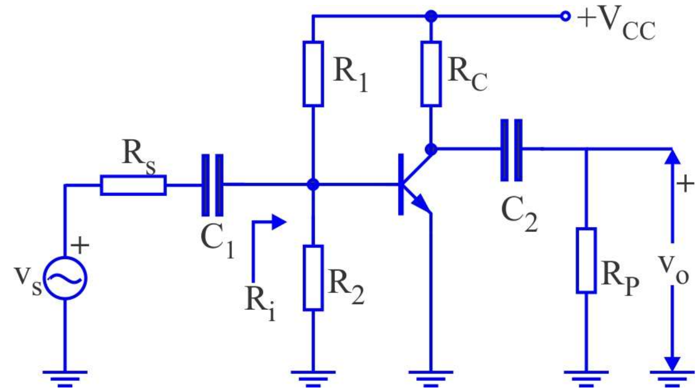


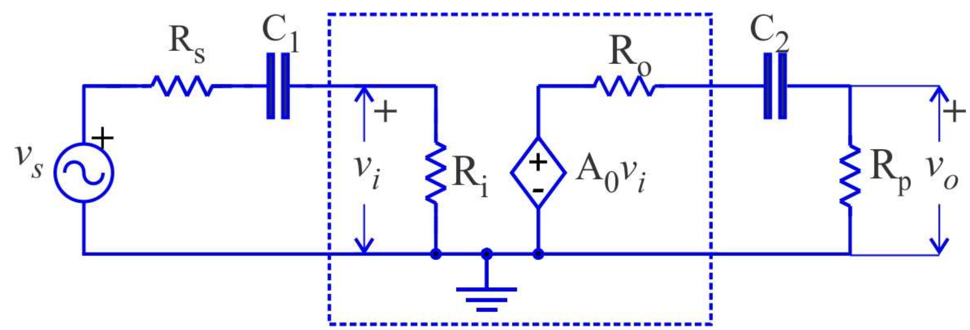
Frekvencijska analiza se može značajno pojednostaviti ukoliko se umesto analize kompletnog kola razmatraju tri frekvencijska opsega odvojeno. Neophodan preduslov za taj pristup je da nisko-frekvencijski opseg dovoljno udaljen od visoko-frekvencijskog opsega. U praksi je to najčešće slučaj, jer su kapacitivnosti kondenzatora za spregu znatno veće od parazitnih kapacitivnosti.

Frekvencijska analiza

Analiza kola na niskim frekvencijama

Na niskim frekvencijama se uzimaju u obzir kapacitvnosti sprežnih kondenzatora. Da bi mogli da primenimo izraze za RC kolo propusnik visokih frekvencija potrebno je odrediti ulaznu i izlaznu otpornost pojačavača.





Frekvencijska analiza

Analiza kola na niskim frekvencijama

Ulaznu otpornost Ri, izlaznu otpornost, Ro, kao i pojačanje na srednjim frekvencijama, Ao, odrećemo analizom kola za srednje frekvencije.

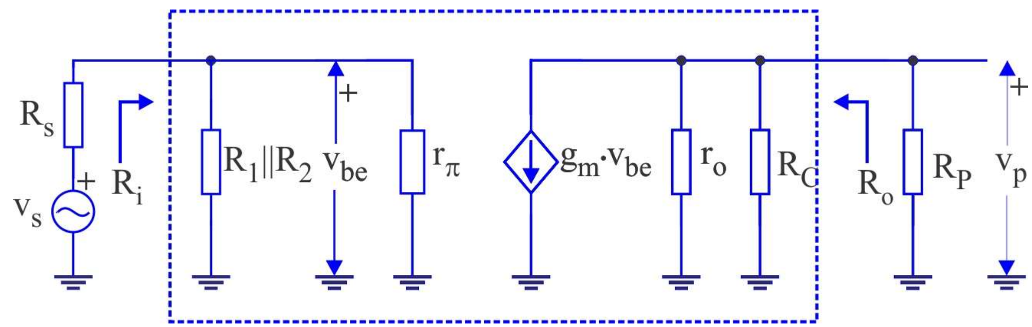
$$R_i = r_\pi || R_1 || R_2$$

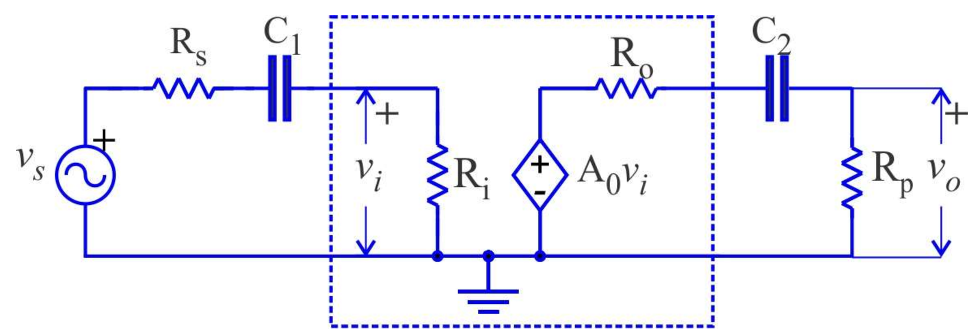
$$R_o = R_C || r_o \approx R_C$$

$$A_{sr} = -\frac{R_1||R_2||r_\pi}{R_s + R_1||R_2||r_{\pi o}} \cdot g_m \cdot R_C||R_P$$

$\tau_1 = C_1 \cdot (R_i + R_s)$ Ulazna vremenska konstanta

$\tau_2 = C_2 \cdot (R_o + R_p)$ Izlazna vremenska konstanta





Ovde se pojavljuju dva RC kola koja su propusnici visokih frekvencija. Pojačanje na niskim frekvencijama biće:

$$A(s) = A_{sr} \cdot \frac{s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_1} \cdot \frac{s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot \tau_2}$$

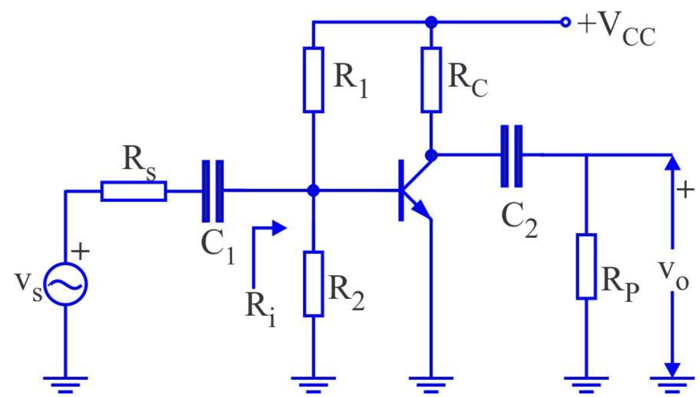
$$\omega_L \approx \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$$

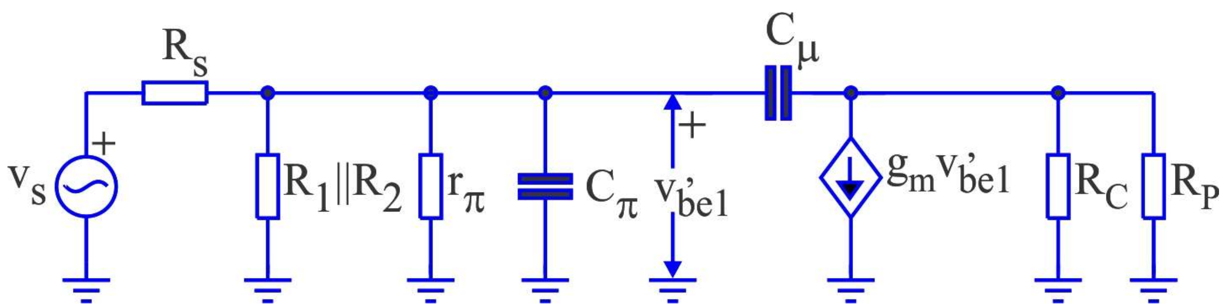
Približni izraz za donju graničnu frekvenciju.

Frekvencijska analiza

Analiza kola na visokim frekvencijama

Na visokim frekvencijama uzimaju se u obzir parazitne kapacitivnosti tranzistora. Za analizu na visokim frekvencijama neophodno je primeniti model tranzistora za visoke frekvencije. Sprežne kapacitivnosti na visokim frekvencijama predstavljaju kratak spoj.





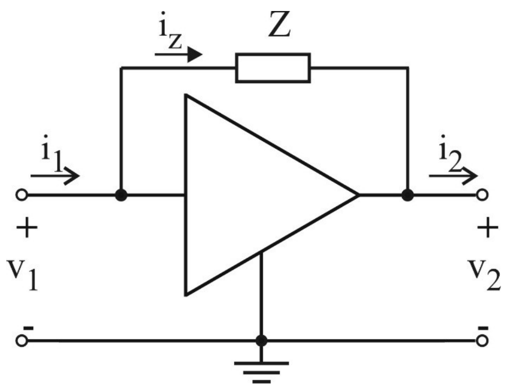
Milerova teorema

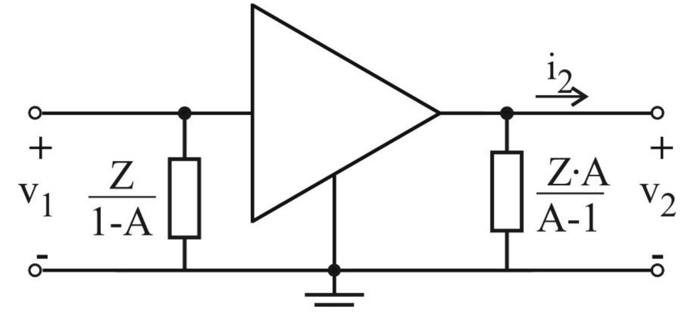
Primenom Milerove teoreme zamenjuje se impedansa koja povezuje izlaz i ulaz nekog pojačavača sa dve impedanse od kojih je jedna između ulaznih priključaka a druga između izlaznih priključaka. Da bi ova dva kola bila identična potrebno je obezbediti da pri istoj vrednosti napona na ulazu v1 i izlazu v2 u oba kola teku iste struje na ulazu i izlazu. Milerova teorema je primenjiva ukoliko je pojačanje A negativno (sprega sa zajedničkim emitorim i sprega sa zajedničkim sorsom).

$$\frac{v_2}{v_1} = \mathrm{A}$$

$$Z_1 = \frac{v_1}{i_Z} = \frac{v_1}{\frac{v_1 - v_2}{Z}} \qquad Z_2 = \frac{v_2}{-i_Z} = \frac{v_2}{\frac{v_2 - v_1}{Z}}$$

$$\boxed{Z_1 = \frac{Z}{1 - A}} \qquad \boxed{Z_2 = \frac{Z \cdot A}{A - 1}}$$

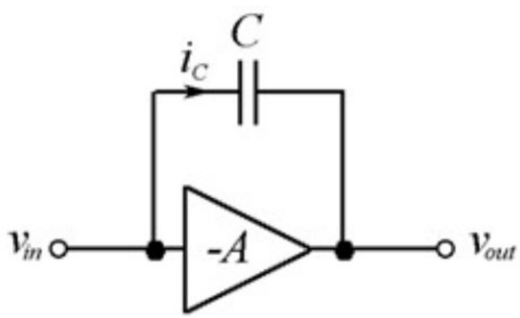




Frekvencijska analiza

Milerova kapacitivnost

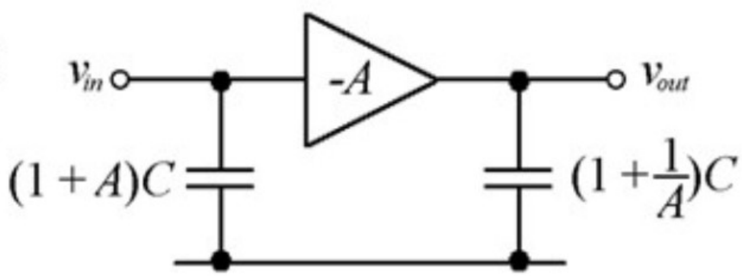
Ekvivalentna kapacitivnost paralelno sa ulaznim pristupom naziva se **Milerova kapacitivnost**. Uticaj ekvivalentne kapacitivnosti na izlazu je znatno manja nego na ulazu.



$$Z_{in} = \frac{Z}{1 - A}$$

$$Y_{in} = (1 - A) \cdot Y$$

$$\boxed{C_{in} = (1 - A) \cdot C}$$



$$Z_{out} = \frac{Z \cdot A}{A - 1}$$

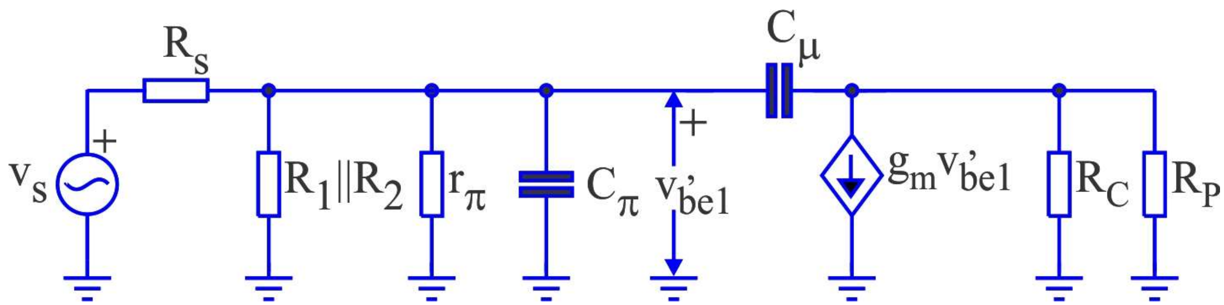
$$Y_{out} = Y \cdot \frac{A - 1}{A}$$

$$\boxed{C_{out} = \frac{A - 1}{A} \cdot C}$$

Frekvencijska analiza

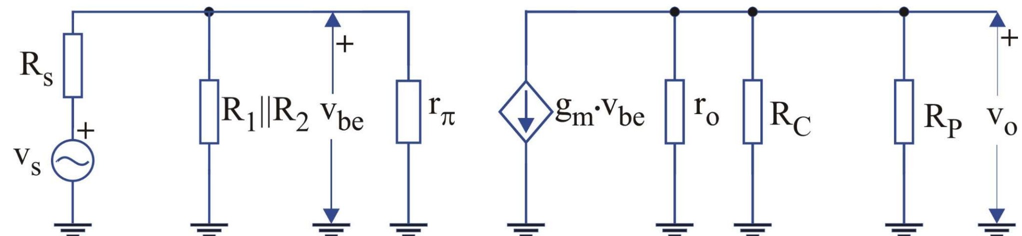
Analiza kola na visokim frekvencijama

Primenom Milerove teoreme kapacitivnost C_μ koja povezuje ulaz i izlaz transformiše se u dve kapacitivnosti. Jedna od te dve kapacitivnosti je paralelna sa ulaznim pristupom a druga paralelna sa izlazim pristupom.



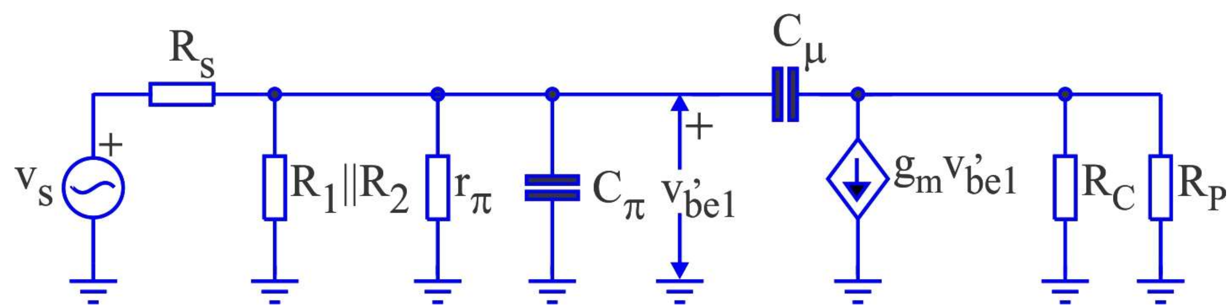
Odnos napona na krajevima Milerove kapacitivnosti na srednjim frekvencijama je:

$$K = \frac{v_o}{v_{be}} = -g_m \cdot R_C||R_p$$



Frekvencijska analiza

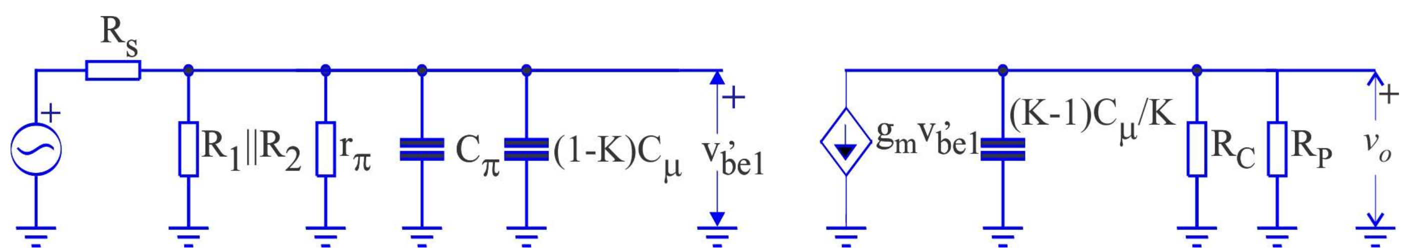
Analiza kola na visokim frekvencijama



$$A_n = \frac{v_o}{v_b} = -g_m \cdot R_C || R_p$$

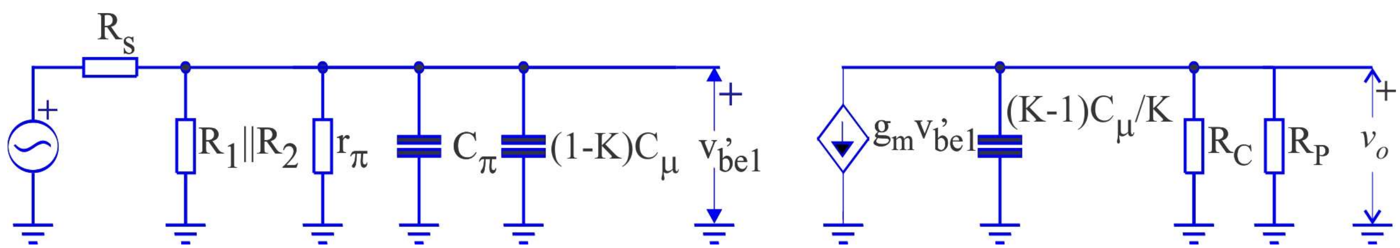
$$C_{in} = (1 - A_n) \cdot C$$

$$C_{out} = \frac{A_n - 1}{A_n} \cdot C$$



Frekvencijska analiza

Analiza kola na visokim frekvencijama



$$C_3 = \left[C_\pi + C_\mu\left(1 + g_m \cdot R_C||R_p\right)\right]$$

$$R_3 = R_s||R_1||R_2||r_\pi$$

$$\tau_3 = C_3 \cdot R_3$$ Ulazna vremenska konstanta

$$C_4 = C_\mu \cdot \frac{\left(1 + g_m \cdot R_C||R_p\right)}{g_m \cdot R_C||R_p} \approx C_\mu$$

$$R_3 = R_C||R_P$$

$$\tau_4 = C_4 \cdot R_4$$ Izlazna vremenska konstanta

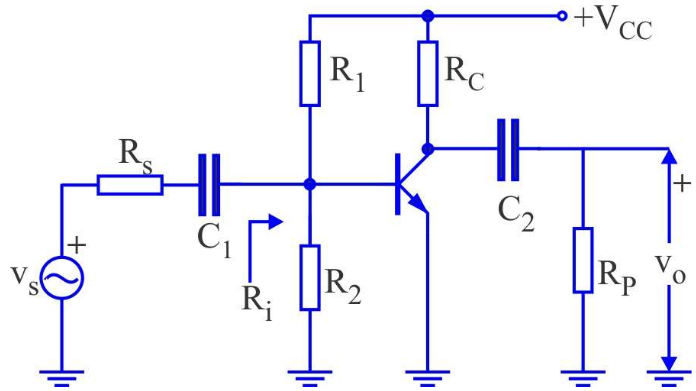
$$A_{sr} = -\frac{R_1||R_2||r_\pi}{R_s + R_1||R_2||r_{\pi o}} \cdot g_m \cdot R_C||R_P$$ Naponsko pojačanje na srednjim frekvencijama

Ovde se pojavljuju dva RC kola koja su propusnici niskih frekvencija. Pojačanje na visokim frekvencijama biće:

$$A(s) = A_{sr} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_3} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_4}$$ Naponsko pojačanje na visokim frekvencijama

$$\omega_H \approx \frac{1}{\tau_3 + \tau_4}$$ Približni izraz za gornju graničnu frekvenciju.

Frekvencijska analiza



Anlitički izraz za naponsko pojačanje na svim frekvecnijama može se izvesti ukoliko su poznate frekvencije polova i nula, za nisko-frekvencijski i visoko-frekvencijski opseg. Na ovaj način dobija se prenosna funkcija u faktorizovanom obliku što omogućava bolji uvid u frekvencijsku karakteristku pojačavača.

$$A(s) = A_{sr} \cdot \frac{s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_1} \cdot \frac{s \cdot \tau_2}{1 + s \cdot \tau_2} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_3} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot \tau_4}$$

Frekvencijska analiza

Frekvencijska analiza pojačavača

Elementarna pitanja

1. Amplitudska i fazna karakteristika prenosne funkcije, idealna amplitudska i idealna fazna karakteristika.

2. Prenosna funkcija linearnog kola u razvijenom i faktorizovanom obliku, nule i polovi prenosne funkcije.

3. Hibridni pi model bipolarnog tranzistora.

Ostala ispitna pitanja

4. **RC kolo propusnik niskih frekvencija.**
5. **RC kolo propusnik visokih frekvencija.**
6. **Metod vremenske konstante kratkog spoja i metod vremenske konstante otvorenog kola.**
7. **Milerova kapacitivnost.**
8. **Visokofrekvencijski model MOSFET tranzistora.**
9. **Fazna i asimptotska aproksimacija amplitudske karakteristike prostog pola (nule) $(1+s/\omega_p)$**
10. **Fazna i asimptotska aproksimacija amplitudske karakteristike konjugovano kompleksnog para polova (nula)** $\left(1+\frac{s}{\omega_{p2}}+\frac{s^2}{\omega_{p3}^2}\right)$